Fuzzy Logic

Alejandro Veloz

Revisaremos conceptos relacionados con conjuntos difusos, operaciones, métodos de inferencia y algunas aplicaciones.

(i) Conjuntos difusos, relaciones difusas y operaciones con conjuntos difusos.
(ii) Mecanismos de inferencia (Mamdani y Takagi-Sugeno).
(iii) Entrenamiento data-driven (modelos neuro-difusos).

Soft Computing

- Aprovecha el poder del razonamiento y aprendizaje similares a los humanos para resolver problemas complejos.
- **Lógica Difusa:** Se ocupa del razonamiento y la toma de decisiones basados en grados de verdad.
- Permite un razonamiento más flexible y se acomoda mejor a problemas que poseen algún grado de **incertidumbre.**
- Redes Neuronales, Algoritmos Genéticos, Optimización por Enjambre de Partículas, Optimización por Colonia de Hormigas, etc.

Técnicas

- Computación evolutiva
- Lógica Difusa
- Aproximación - búsqueda
- Razonamiento Aproximado
- Redes Neuronales
- Métodos probabilísticos

Conjuntos difusos

- La lógica difusa se sustenta en la teoría de conjuntos difusos.
- El concepto de conjuntos difusos fue introducido por Lotfi Zadeh (1965).

Responden a las limitaciones de los conjuntos nítidos que solo consideran elementos con características muy definidas $\rightarrow$ existe límite claro para el conjunto.

Lotfi Zadeh

Lotfi A. Zadeh

36 idiomas

Artículo Discusión   Leer Editar Ver historial Herramientas

Lotfi Asker Zadeh[1] (/ˈzɑːdeɪ/; en azerí: *Lütfi Rəhim oğlu Ələsgərzadə*; en persa: لطفی علی‌عسگرزاده; Bakú, 4 de febrero de 1921—Berkeley, 6 de septiembre de 2017)[2 3] fue un matemático, científico, informático, ingeniero eléctrico y profesor emérito de inteligencia artificial en la Universidad de Berkeley, California.[4 5 6 7] Es famoso por introducir en 1965 la teoría de conjuntos difusos o lógica difusa y se le considera el padre de la teoría de la posibilidad.[8]

Zadeh era más conocido por proponer matemáticas difusas que consistían en estos conceptos relacionados: conjuntos difusos,[9] lógica difusa,[10] algoritmos difusos,[11] semántica difusa,[12] lenguajes difusos,[13] control difuso,[14] sistemas difusos,[15] probabilidades difusas y eventos difusos[16] e información difusa.[17]

Fue miembro fundador de la Academia Euroasiática.[18]

Nació en 1921 en Bakú, una ciudad en el mar Caspio de la antigua República Socialista Soviética de Azerbaiyán. Después de emigrar a Irán y estudiar en la Universidad de Teherán llegó a Estados Unidos en donde continuó sus estudios en el MIT, en la Universidad de Columbia y finalmente en la Universidad de Berkeley.

Por sus contribuciones en este campo recibió varios galardones, entre los que destaca la Medalla Richard W. Hamming en 1992 y doctorados *honoris causa* de varias instituciones del mundo, entre ellas la Universidad de Oviedo (1995), la Universidad de Granada (1996) y la Universidad Politécnica de Madrid (2007).

Se le otorgó el Premio Fundación BBVA Fronteras del Conocimiento 2012 por la invención y el desarrollo de la lógica difusa.[19]

Vida y carrera [editar]

Zadeh nació en Bakú, República Socialista Soviética de Azerbaiyán como **Lotfi Aliaskerzadeh,**[20] hijo de Rahim Aleskerzade, un periodista azerí de Ardabil asignado desde Irán, y Fanya Korenman,

Lotfi ali Asker Zadeh

Retrato de Lotfali A. Zadeh

Información personal

Nombre en azerbaiyano	Lütfəli Rəhim oğlu Əsgərzadə
Nacimiento	4 de febrero de 1921 Bakú, República Socialista Soviética de Azerbaiyán, URSS
Fallecimiento	6 de septiembre de 2017 (96 años)

Conjunto nítido (crisp)

Sea X el conjunto universal (conjunto de interés, por ejemplo, temperatura, velocidad, etc.)

Un **conjunto nítido** A se define mediante una **función característica**

$$\chi_A : X \to \{0, 1\}$$

que asigna los valores 1 o 0 a cada elemento $x \in X$, dependiendo de si x pertenece o no a A.

La verdad o falsedad de la afirmación “x pertenece a A” se determina por el par $(x, \chi_A(x))$.

Conjunto difuso

Un **conjunto difuso** A se define mediante una **función de pertenencia**

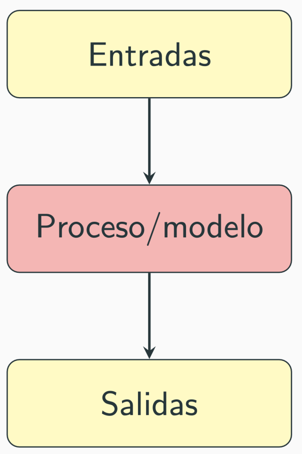
$$\mu_A : X \to [0, 1]$$

que describe el grado de pertenencia de los elementos en X.

Los valores de $\mu_A(x)$ más cercanos a 1 denotan un mayor grado de pertenencia.

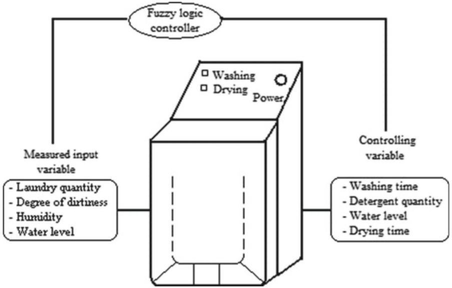
El grado en el que la afirmación “x pertenece a A” es **verdadera** se determina por el par $(x, \mu_A(x))$.

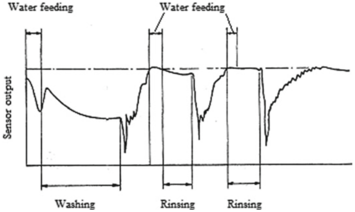
Enfoques para abordar la incertidumbre



Tipo	Fuente	Método
Aleatoria		Métodos probabilísticos
Epistémica	Falta de conocimiento	Teoría de posibilidades
	Imprecisión	Lógica difusa
	Conflicto	Teoría de Dempster-Shafer

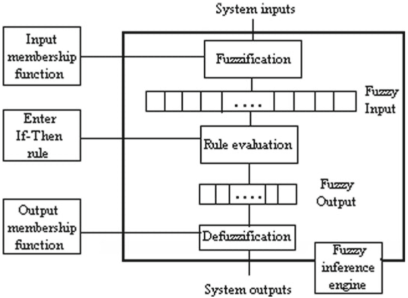
Fuzzy Logic

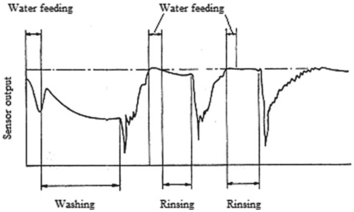




Bhatt et al. A Fuzzy Logic Approach for Improved Simulation and Control Washing Machine System Variables, Select Proceedings of ETAEERE 2020.

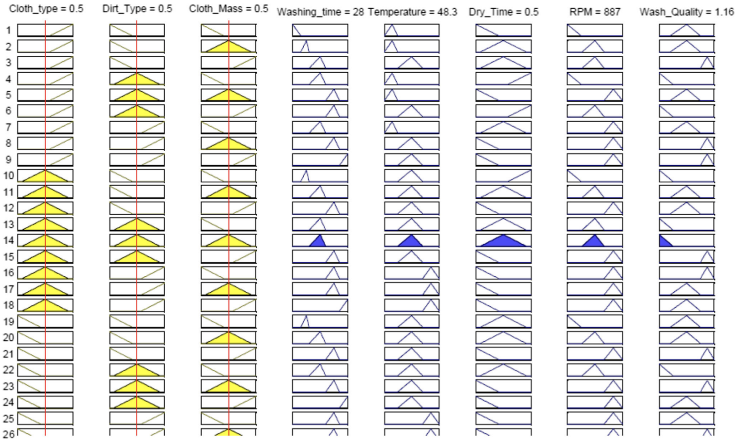
Fuzzy Logic



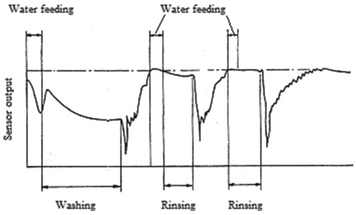


Bhatt et al. A Fuzzy Logic Approach for Improved Simulation and Control Washing Machine System Variables, Select Proceedings of ETAEERE 2020.

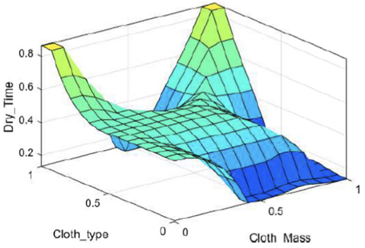
Fuzzy Logic


Cloth_type = 0.5
Dirt_Type = 0.5
Cloth_Mass = 0.5
Washing_time = 28
Temperature = 48.3
Dry_Time = 0.5
RPM = 887
Wash_Quality = 1.16
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26

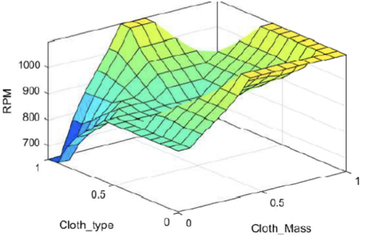
Fuzzy Logic



Water feeding
Water feeding
Sensor output
Washing
Rinsing
Rinsing

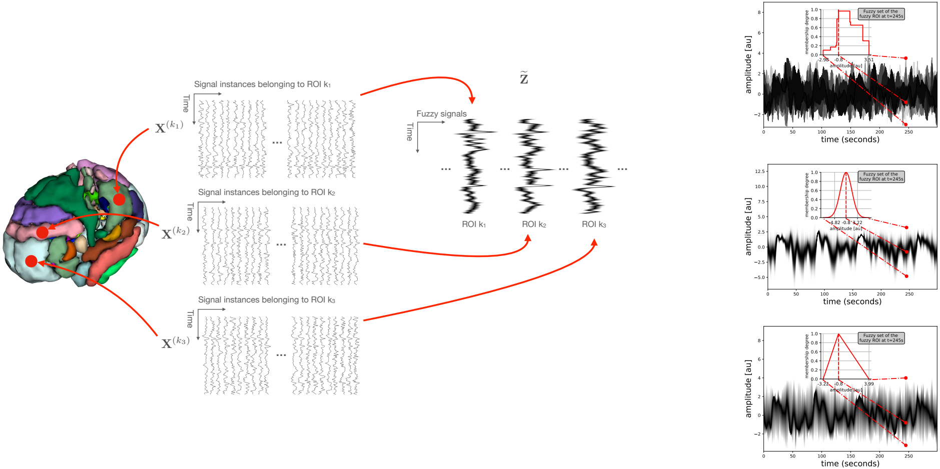


Dry_Time
0.8
0.6
0.4
0.2
1
0.5
0
Cloth_type
0
0.5
1
Cloth Mass

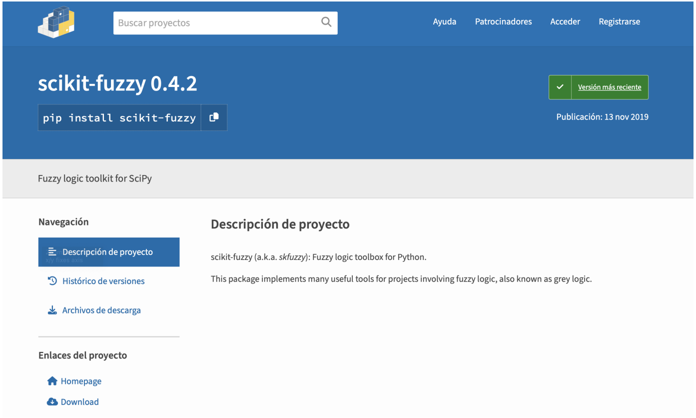


RPM
1000
900
800
700
1
0.5
0
Cloth_type
0
0.5
1
Cloth_Mass

Modelos con conjuntos difusos



scikit-fuzzy



Home User Guide Example Gallery API Documentation Source

Search documentation ...

SciKit-Fuzzy

Scikit-Fuzzy is a collection of fuzzy logic algorithms intended for use in the SciPy Stack, written in the Python computing language.

This SciKit is developed by the SciPy community. Contributions are welcome! Please join us on the mailing list or our persistent chatroom on Gitter.IM.

Homepage and package documentation

http://pythonhosted.org/scikit-fuzzy/

Source, bugs, and development

http://github.com/scikit-fuzzy/scikit-fuzzy

Gitter.IM

https://gitter.im/scikit-fuzzy/scikit-fuzzy

Mailing List

http://groups.google.com/group/scikit-fuzzy

Navigation

Documentation Home

Previous topic

skfuzzy 0.2 docs

Next topic

API Reference

Contents

- SciKit-Fuzzy
  - Homepage and package documentation
  - Source, bugs, and development
  - Gitter.IM
  - Mailing List

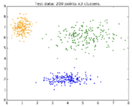
© Copyright the scikit-fuzzy development team. Created using Bootstrap and Sphinx. Thanks to scikit-image team's template.

Home User Guide Example Gallery API Documentation Source

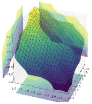
Search documentation ...

General examples

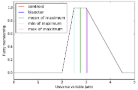
General-purpose and introductory examples for the scikit.



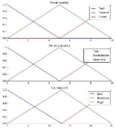
Fuzzy c-means clustering



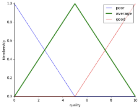
Fuzzy Control Systems: Advanced Example



Defuzzification



The Tipping Problem - The Hard Way



Fuzzy Control Systems: The Tipping Problem

Navigation

Documentation Home

Previous topic

License

Next topic

Fuzzy c-means clustering

pyFTS

pyFTS 1.7 documentation » pyFTS – Fuzzy Tim... next | | index

Fork me on GitHub

pyFTS – Fuzzy Time Series for Python

What is pyFTS Library?

License GPLv3 Made with Python

This package is intended for students, researchers, data scientists or whose want to exploit the Fuzzy Time Series methods. These methods provide simple, easy to use, computationally cheap and human-readable models, suitable from statistic laymans to experts.

This tool is developed on MINDS Lab, headed by Prof. Frederico Gadelha Guimarães from Electrical Engineering Departament of Federal University of Minas Gerais (UFMG) at Brazil. Also colaborate with this tool the Brazilian instituitions Federal Institute of North of Minas Gerais (IFNMG) and Federal Institute of Minas Gerais (IFMG) .

MINDS UFMG INSTITUTO FEDERAL Norte de Minas Gerais IFMG

API Documentation:

- pyFTS Quick Start
  - How to install pyFTS?
  - What are Fuzzy Time Series (FTS)?
  - Usage examples
  - A short tutorial on Fuzzy Time Series
- pyFTS
  - pyFTS package
    - Subpackages
    - Submodules
    - pyFTS.conf module
    - Module contents

Table of Contents

pyFTS – Fuzzy Time Series for Python

- What is pyFTS Library?
- How to reference pyFTS?
- Indexes

Next topic

pyFTS Quick Start

This Page

Show Source

Quick search

Go

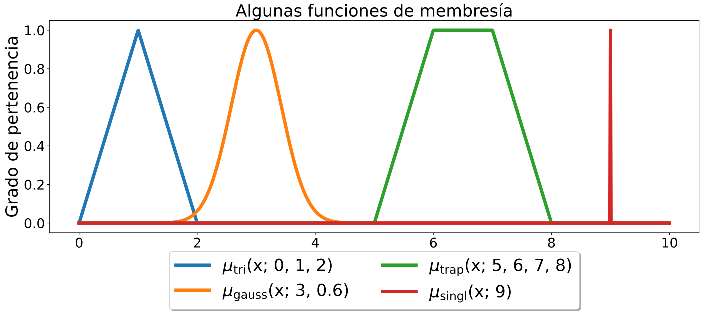
Conjuntos difusos y operaciones

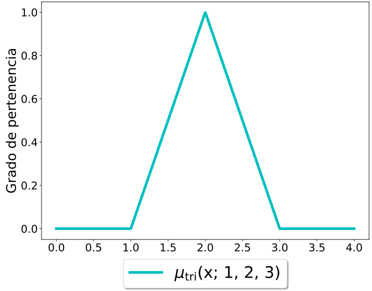
Función de pertenencia (MF)

Existen varias funciones paramétricas que se pueden utilizar como **función de pertenencia**: $\mu_A : \mathbb{R} \to [0, 1]$.

Función de pertenencia (MF)

Existen varias funciones paramétricas que se pueden utilizar como **función de pertenencia:** $\mu_A : \mathbb{R} \to [0, 1]$.

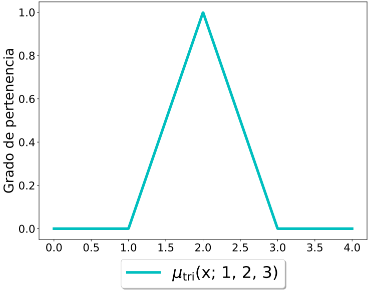




MF **triangular**:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} (x-a)/(b-a) & \text{si } a \leq x \leq b, \\ (c-x)/(c-b) & \text{si } b < x \leq c, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

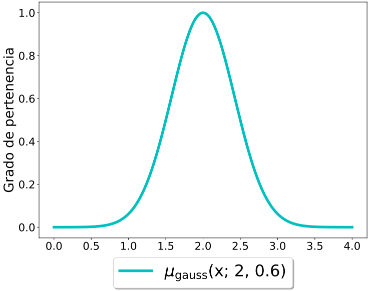
$$\mu_A(x) = \max\left(0,\ \min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right)\right)$$



MF **triangular**:

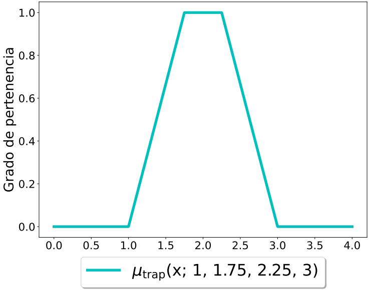
$$\mu_A(x) = \begin{cases} (x-a)/(b-a) & \text{si } a \leq x \leq b, \\ (c-x)/(c-b) & \text{si } b < x \leq c, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\mu_A(x) = \max\left(0,\ \min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right)\right)$$



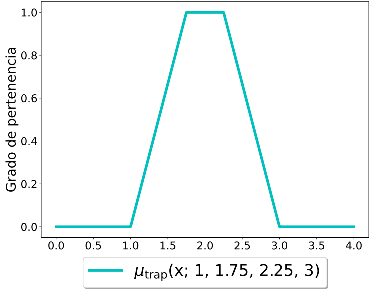
MF con forma **Gaussiana**:

$$\mu_A(x) = \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right)$$



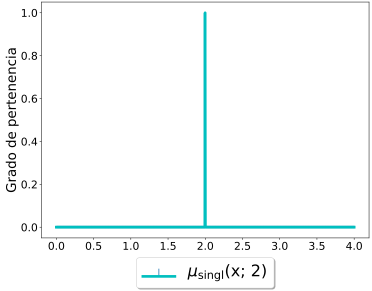
MF **trapezoidal**:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} (x-a)/(b-a) & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 1 & \text{si } b < x \leq c, \\ (d-x)/(d-c) & \text{si } c < x \leq d, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$



MF **trapezoidal**:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} (x-a)/(b-a) & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 1 & \text{si } b < x \leq c, \\ (d-x)/(d-c) & \text{si } c < x \leq d, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$



MF **singleton**:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo

Defina conjuntos difusos para representar las afirmaciones:

i. "x está alrededor de M"

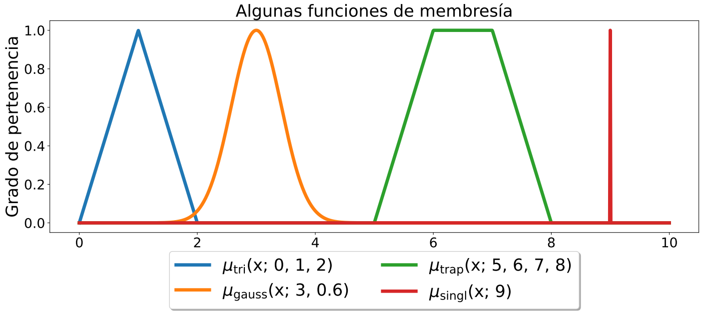
iii. "x no está alrededor de M"

Algunas propiedades

Sea A un conjunto difuso en X con MF $\mu_A(x)$.

Soporte: Es el subconjunto nítido de X donde $\mu_A(x)$ es mayor que cero, es decir,

$$\mathrm{supp}(A) = \{x \mid \mu_A(x) > 0\}$$

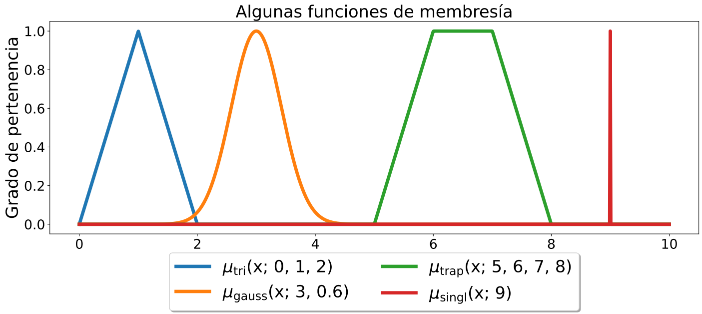


Algunas propiedades

Sea A un conjunto difuso en X con MF $\mu_A(x)$.

Núcleo: Es el subconjunto nítido de X donde $\mu_A(x)$ es uno, es decir,

$$\text{core}(A) = \{x \mid \mu_A(x) = 1\}$$

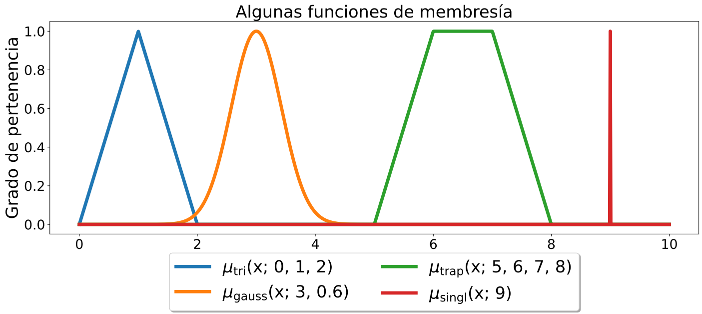


Algunas propiedades

Sea A un conjunto difuso en X con MF $\mu_A(x)$.

Altura: Es el supremo de $\mu_A(x)$, es decir,

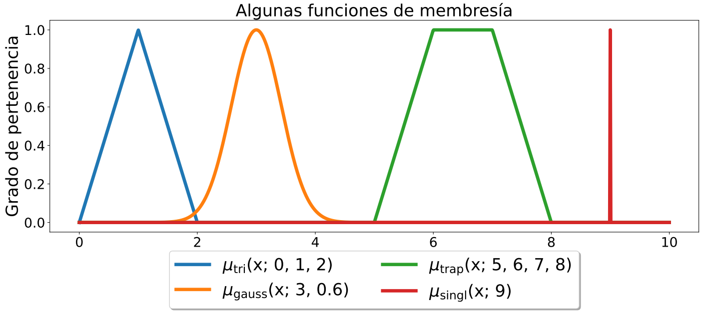
$$\text{hgt}(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x)$$



Algunas propiedades

Sea A un conjunto difuso en X con MF $\mu_A(x)$.

Normalidad: A es **normal** si existe al menos un valor de $x \in X$ tal que $\mu_A(x) = 1$.



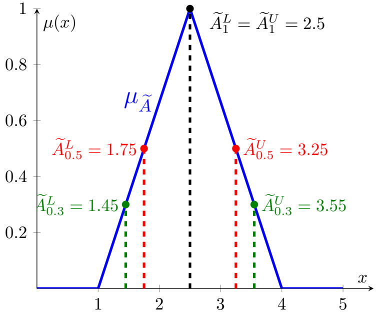
Algunas propiedades

Sea A un conjunto difuso en X con MF $\mu_A(x)$.

α**-corte:** El α-corte de A es el subconjunto de X donde $\mu_A(x) \geq \alpha$, es decir,

$$A_\alpha = \{x | \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

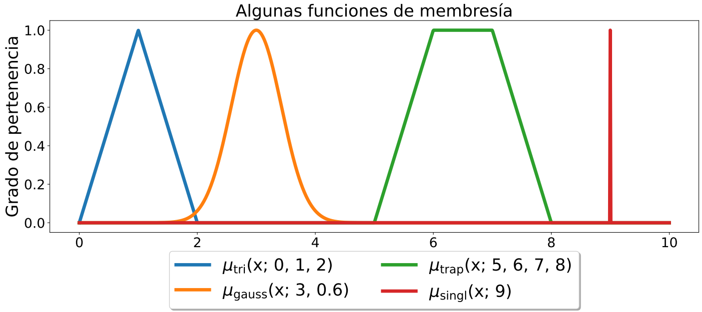
Se llama α**-corte estricto** si la relación es con el símbolo $>$.



Algunas propiedades

Sea A un conjunto difuso en X con MF $\mu_A(x)$.

Convexidad: A es convexo si cada uno de sus α-cortes son convexos.



Intersección: norma triangular (t-norma)

Es una función de la forma:

$$T : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$$

Intersección: norma triangular (t-norma)

Es una función de la forma:

$$T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$$

Se usa para representar la **conjunción lógica *y*.**

Considere $x, x^{'}, y, y^{'}, z \in [0,1]$.

Intersección: norma triangular (t-norma)

Es una función de la forma:

$$T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$$

Se usa para representar la **conjunción lógica *y*.**

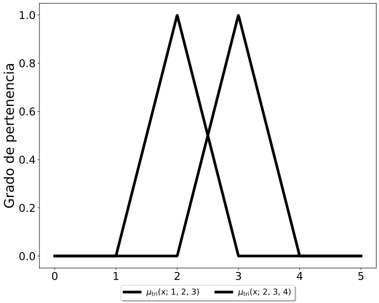
Considere $x, x^{'}, y, y^{'}, z \in [0,1]$.

Las t-normas deben cumplir las siguientes propiedades:

Simetría	$T(x,y) = T(y,x)$
Asociatividad	$T(x, T(y,z)) = T(T(x,y), z)$
Monotonía	$T(x,y) \leq T(x', y')$, si $x \leq x'$ y $y \leq y'$
Identidad	$T(x,1) = x$

Intersección - ejemplo

Sean A_1 y A_2 dos conjuntos difusos triangulares con MFs $\mu_{A_1}(x; 1, 2, 3)$, $\mu_{A_2}(x; 2, 3, 4)$.



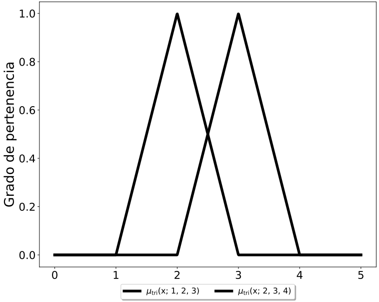
Dos t-normas muy usadas son:

$$T_{\text{min}}(x, y) = \text{min}(x, y)$$

$$T_{\text{proba}}(x, y) = xy$$

Intersección - ejemplo

Sean A_1 y A_2 dos conjuntos difusos triangulares con MFs $\mu_{A_1}(x;1,2,3)$, $\mu_{A_2}(x;2,3,4)$.



Dos t-normas muy usadas son:

$$T_{\text{min}}(x,y) = \text{min}(x,y)$$

$$T_{\text{proba}}(x,y) = xy$$

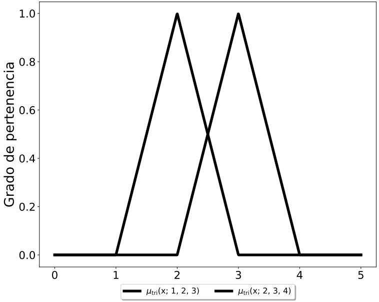
Supongamos $x = 2.1$

$\mu_{A_1}(2.1) = 0.9$

$\mu_{A_2}(2.1) = 0.1$

Intersección - ejemplo

Sean A_1 y A_2 dos conjuntos difusos triangulares con MFs $\mu_{A_1}(x; 1, 2, 3)$, $\mu_{A_2}(x; 2, 3, 4)$.



Dos t-normas muy usadas son:

$$T_{\text{min}}(x, y) = \text{min}(x, y)$$

$$T_{\text{proba}}(x, y) = xy$$

Supongamos $x = 2.1$

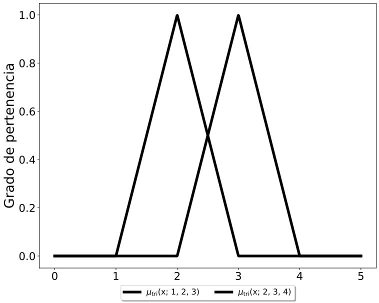
$\mu_{A_1}(2.1) = 0.9$

$\mu_{A_2}(2.1) = 0.1$

$$\begin{aligned} T_{\text{min}} &= \text{min}(\mu_{A_1}(2.1), \mu_{A_2}(2.1)) \\ &= \text{min}(0.9, 0.1) = 0.1 \end{aligned}$$

Intersección - ejemplo

Sean A_1 y A_2 dos conjuntos difusos triangulares con MFs $\mu_{A_1}(x; 1, 2, 3)$, $\mu_{A_2}(x; 2, 3, 4)$.



Dos t-normas muy usadas son:

$$T_{\text{min}}(x, y) = \text{min}(x, y)$$

$$T_{\text{proba}}(x, y) = xy$$

Supongamos $x = 2.1$

$\mu_{A_1}(2.1) = 0.9$

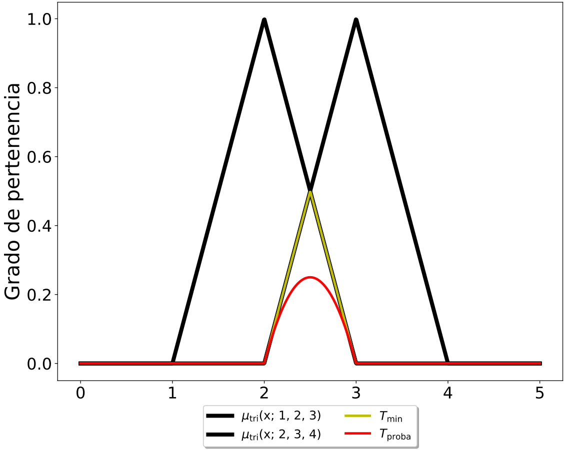
$\mu_{A_2}(2.1) = 0.1$

$$\begin{aligned} T_{\text{min}} &= \text{min}(\mu_{A_1}(2.1), \mu_{A_2}(2.1)) \\ &= \text{min}(0.9, 0.1) = 0.1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{\text{proba}} &= \mu_{A_1}(2.1) * \mu_{A_2}(2.1) \\ &= 0.9 * 0.1 = 0.09 \end{aligned}$$

Intersección - ejemplo

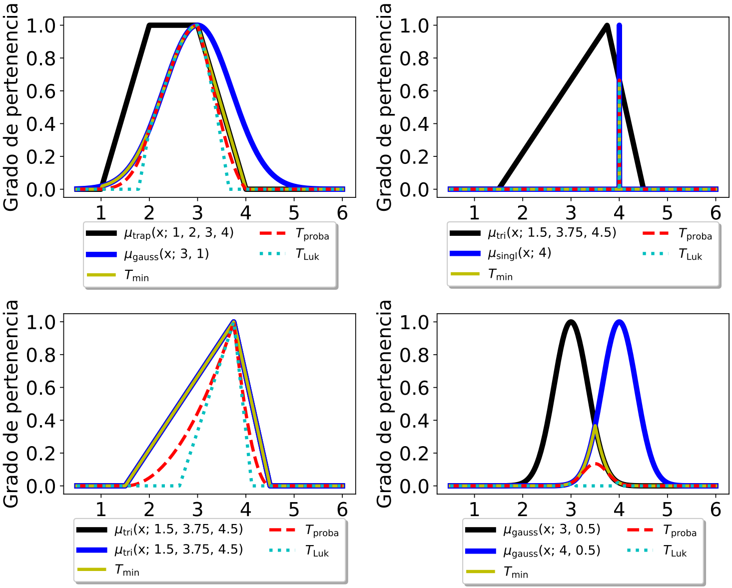
Sean A_1 y A_2 dos conjuntos difusos triangulares con MFs $\mu_{A_1}(x; 1, 2, 3)$, $\mu_{A_2}(x; 2, 3, 4)$.

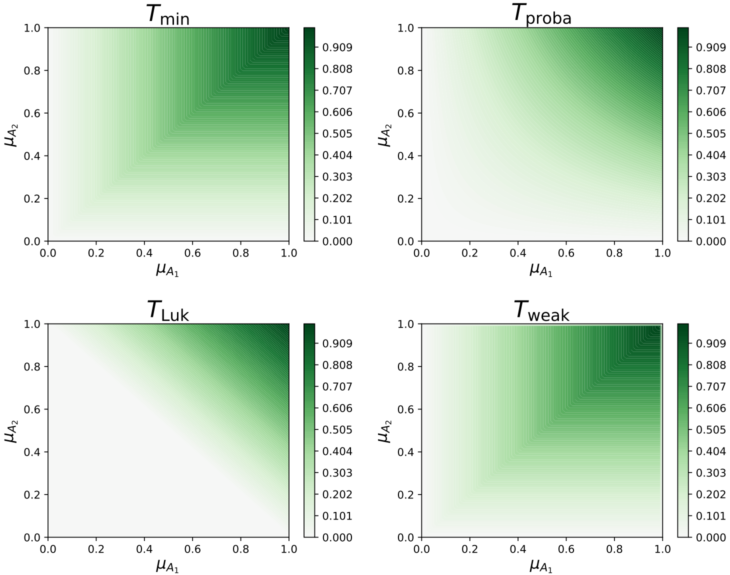


$$T_{\text{min}} = \text{min}(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x))$$
$$T_{\text{proba}} = \mu_{A_1}(x) * \mu_{A_2}(x)$$

T-normas comúnmente utilizadas

minimum	$MIN(x,y) = \min(x,y)$
Łukasiewicz	$LAND(x,y) = \max(x+y-1,0)$
probabilistic	$PAND(x,y) = xy$
weak	$WEAK(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & \text{si } \max(x,y) = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
Hamacher	$HAND_\gamma(x,y) = \frac{xy}{\gamma+(1-\gamma)(x+y-xy)}, \qquad \gamma \geq 0$
Dubois y Prade	$DAND_\alpha(x,y) = \frac{xy}{\max(x,y,\alpha)}, \qquad \alpha \in [0,1]$
Yager	$YAND_p(x,y) = 1 - \min(1, [(1-x)^p + (1-y)^p]^{\frac{1}{p}}), \qquad p > 0$


Grado de pertenencia
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
1 2 3 4 5 6
μ_{trap}(x; 1, 2, 3, 4)
μ_{gauss}(x; 3, 1)
T_{min}
T_{proba}
T_{Luk}
Grado de pertenencia
μ_{tri}(x; 1.5, 3.75, 4.5)
μ_{singl}(x; 4)
T_{min}
T_{proba}
T_{Luk}
Grado de pertenencia
μ_{tri}(x; 1.5, 3.75, 4.5)
μ_{tri}(x; 1.5, 3.75, 4.5)
T_{min}
T_{proba}
T_{Luk}
Grado de pertenencia
μ_{gauss}(x; 3, 0.5)
μ_{gauss}(x; 4, 0.5)
T_{min}
T_{proba}
T_{Luk}


$T_{\min}$
T_{proba}
T_{Luk}
T_{weak}
μ_{A_1}
μ_{A_2}
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.000
0.101
0.202
0.303
0.404
0.505
0.606
0.707
0.808
0.909

Unión: conorma triangular (t-conorma)

Es una función de la forma

$$S : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$$

Unión: conorma triangular (t-conorma)

Es una función de la forma

$$S : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$$

Se usa para representar la **disyunción lógica** ***o*.**

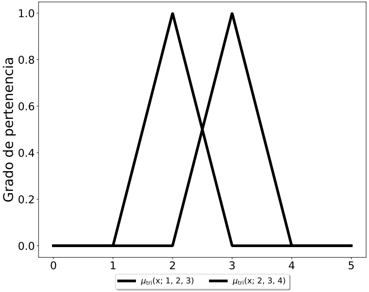
Considere $x, x^{'}, y, y^{'}, z \in [0,1]$.

Las t-conormas deben cumplir las siguientes propiedades:

Simetría	$S(x,y) = S(y,x)$
Asociatividad	$S(x, S(y,z)) = S(S(x,y), z)$
Monotonía	$S(x,y) \leq S(x', y')$, si $x \leq x'$ y $y \leq y'$
Identidad con cero	$S(x,0) = x$

Unión - ejemplo

Sean A_1 y A_2 dos conjuntos difusos triangulares con MFs $\mu_{A_1}(x; 1, 2, 3)$, $\mu_{A_2}(x; 2, 3, 4)$.

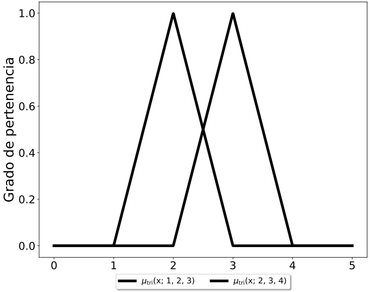


Dos t-conormas muy usadas son:

$$S_{\text{min}}(x, y) = \max(x, y)$$
$$S_{\text{proba}}(x, y) = x + y - xy$$

Unión - ejemplo

Sean A_1 y A_2 dos conjuntos difusos triangulares con MFs $\mu_{A_1}(x; 1, 2, 3)$, $\mu_{A_2}(x; 2, 3, 4)$.



Dos t-conormas muy usadas son:

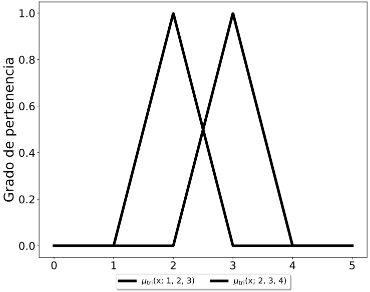
$$S_{\text{min}}(x, y) = \text{max}(x, y)$$
$$S_{\text{proba}}(x, y) = x + y - xy$$

Supongamos $x = 2.1$

$$\mu_{A_1}(2.1) = 0.9$$
$$\mu_{A_2}(2.1) = 0.1$$

Unión - ejemplo

Sean A_1 y A_2 dos conjuntos difusos triangulares con MFs $\mu_{A_1}(x; 1, 2, 3)$, $\mu_{A_2}(x; 2, 3, 4)$.



Dos t-conormas muy usadas son:

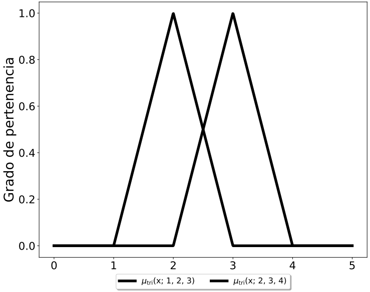
$$S_{\text{min}}(x, y) = \text{max}(x, y)$$
$$S_{\text{proba}}(x, y) = x + y - xy$$

Supongamos $x = 2.1$
$\mu_{A_1}(2.1) = 0.9$
$\mu_{A_2}(2.1) = 0.1$

$$\begin{aligned} S_{\text{max}} &= \text{max}(\mu_{A_1}(2.1), \mu_{A_2}(2.1)) \\ &= \text{max}(0.9, 0.1) = 0.9 \end{aligned}$$

Unión - ejemplo

Sean A_1 y A_2 dos conjuntos difusos triangulares con MFs $\mu_{A_1}(x; 1, 2, 3)$, $\mu_{A_2}(x; 2, 3, 4)$.



Dos t-conormas muy usadas son:

$$S_{\text{min}}(x, y) = \text{max}(x, y)$$
$$S_{\text{proba}}(x, y) = x + y - xy$$

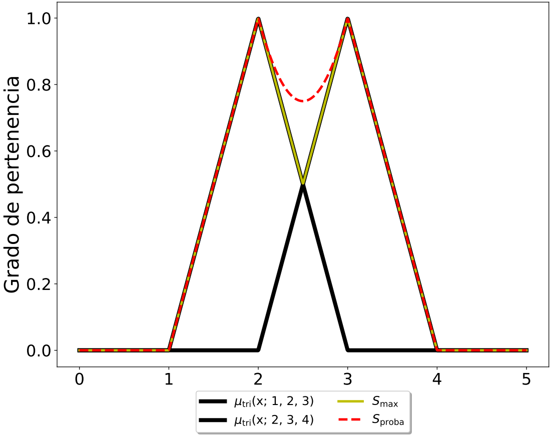
Supongamos $x = 2.1$
$\mu_{A_1}(2.1) = 0.9$
$\mu_{A_2}(2.1) = 0.1$

$$\begin{aligned} S_{\text{max}} &= \text{max}(\mu_{A_1}(2.1), \mu_{A_2}(2.1)) \\ &= \text{max}(0.9, 0.1) = 0.9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\text{proba}} &= \mu_{A_1}(2.1) + \mu_{A_2}(2.1) \\ &\quad - \mu_{A_1}(2.1) * \mu_{A_2}(2.1) \\ &= 0.91 \end{aligned}$$

Unión - ejemplo

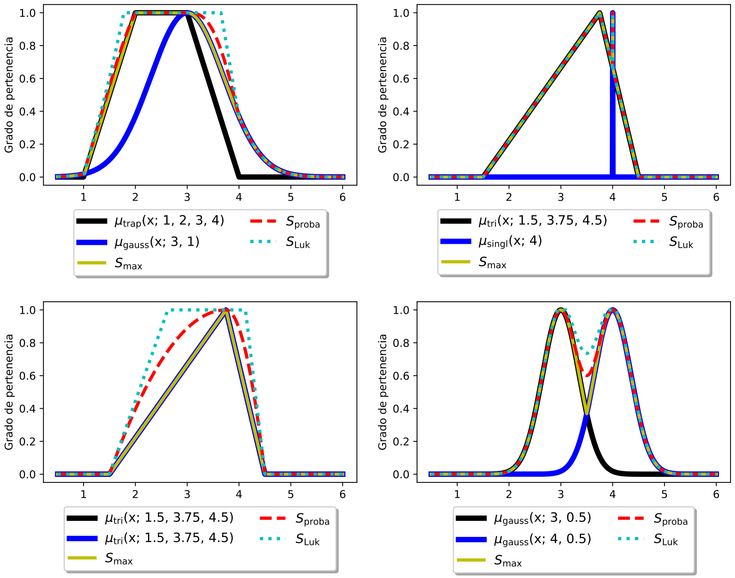
Sean A_1 y A_2 dos conjuntos difusos triangulares con MFs $\mu_{A_1}(x;1,2,3)$, $\mu_{A_2}(x;2,3,4)$.

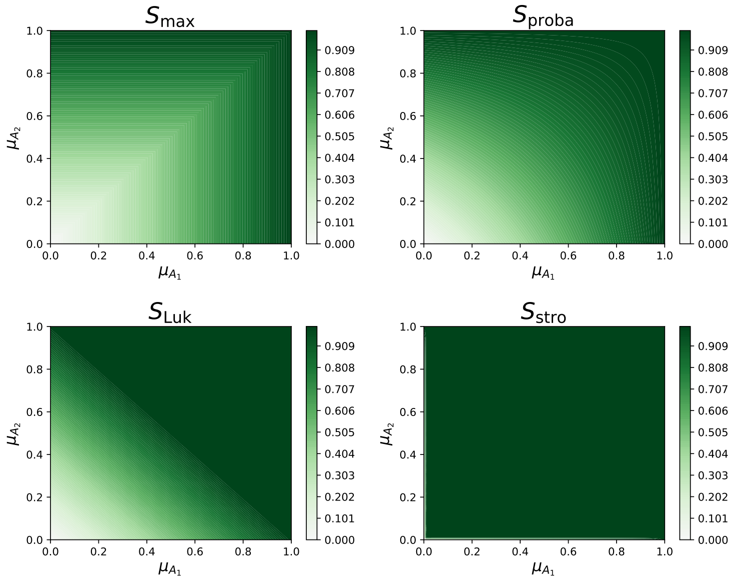


$$S_{\text{max}} = \text{max}(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x))$$
$$S_{\text{proba}} = \mu_{A_1}(x) + \mu_{A_2}(x) - \mu_{A_1}(x) * \mu_{A_2}(x)$$

T-conormas comúnmente utilizadas

maximum	$MAX(x,y) = \max(x,y)$
Łukasiewicz	$LOR(x,y) = \min(x+y,1)$
probabilistic	$POR(x,y) = x+y-xy$
strong	$STRONG(x,y) = \begin{cases} \max(x,y) & \text{si } \min(x,y)=0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$
Hamacher	$HOR_\gamma(x,y) = \frac{x+y-(2-\gamma)xy}{1-(1-\gamma)xy}, \qquad \gamma \geq 0$
Yager	$YOR_p(x,y) = \min(1, \sqrt[p]{x^p+y^p}), \qquad p > 0$


Grado de pertenencia
$\mu_{trap}(x; 1, 2, 3, 4)$
$\mu_{gauss}(x; 3, 1)$
S_{max}
S_{proba}
S_{Luk}
$\mu_{tri}(x; 1.5, 3.75, 4.5)$
$\mu_{singl}(x; 4)$
$\mu_{tri}(x; 1.5, 3.75, 4.5)$
$\mu_{tri}(x; 1.5, 3.75, 4.5)$
$\mu_{gauss}(x; 3, 0.5)$
$\mu_{gauss}(x; 4, 0.5)$



$S_{\max}$
S_{proba}
S_{Luk}
S_{stro}
μ_{A_1}
μ_{A_2}
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.000
0.101
0.202
0.303
0.404
0.505
0.606
0.707
0.808
0.909

Complemento

Sea A un conjunto difuso en $X \to \mu_A(x)$ se interpreta como el grado en que x pertenece a A.

Complemento

Sea A un conjunto difuso en $X \rightarrow \mu_A(x)$ se interpreta como el grado en que x pertenece a A.

Sea cA el complemento difuso de A de tipo c.

$\mu_{cA}(x)$ se interpreta como el grado en que x pertenece a cA y como el grado en que x no pertenece a A.

Complemento

Sea A un conjunto difuso en $X \to \mu_A(x)$ se interpreta como el grado en que x pertenece a A.

Sea cA el complemento difuso de A de tipo c.

$\mu_{cA}(x)$ se interpreta como el grado en que x pertenece a cA y como el grado en que x no pertenece a A.

Un complemento difuso c tiene la forma $c : [0,1] \to [0,1]$, que asigna un valor $c(\mu_A(x))$ a cada grado de pertenencia $\mu_A(x)$.

Se deben cumplir (al menos) las siguientes condiciones:

Condiciones de borde	$c(0) = 1$ y $c(1) = 0$
Monotonía	$c(x) \geq c(y)$, si $x \leq y$ para todo $x, y \in [0,1]$

Otras dos condiciones deseables son la continuidad y la involución, esto es, $c(c(x)) = x$, $x \in [0,1]$.

Complemento - ejemplo

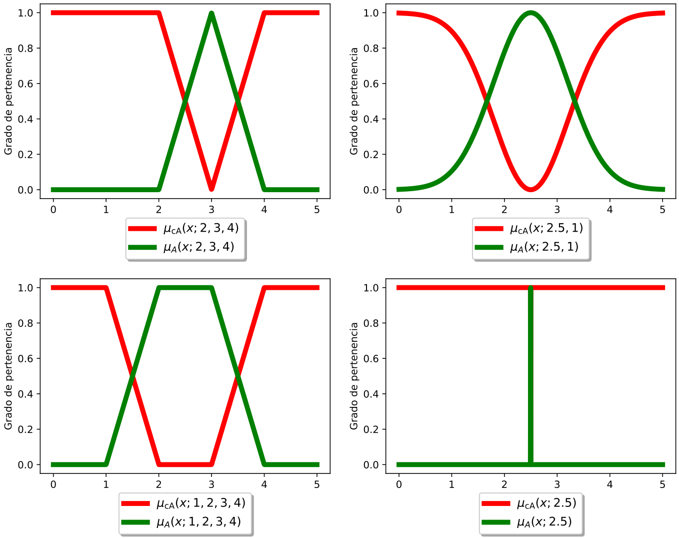
Determine los complementos difusos de los siguientes conjuntos:

i. A_1 con MF triangular $\mu_{A_1}(x; 1, 2, 3)$.

ii. A_2 con MF Gaussiana $\mu_{A_2}(x; 2, 0.5)$.

iii. A_3 con MF singleton $\mu_{A_3}(x; 0.3)$.

Complemento - ejemplo



Relaciones difusas

Relaciones difusas

Una relación representa la asociación, interacción o interconexión entre los elementos de dos o más conjuntos.

Una **relación difusa** definida en los conjuntos $X_1, X_2, \dots, X_n$ es un subconjunto difuso de $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$.

Consideremos el conjunto $X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$.

Una relación difusa definida en $X \times Y$ se representa mediante la función de pertenencia:

$$\mu_R : X \times Y \to [0, 1]$$

Relaciones difusas

Ejemplos de relaciones "lingüísticas" comunes que pueden describirse mediante relaciones difusas:

- "x es mucho mayor que y"
- "x está cerca de y"
- "x e y son casi iguales"
- "x e y están muy lejos"

Considere $x, y \in \{1, 2, 3, 4\}$, la relación *"x es mucho mayor que y"* se puede representar mediante:

$$\mu_R(x, y) = \frac{x}{x+y}$$

x/y	1	2	3	4
1	0.5	0.33	0.25	0.20
2	0.67	0.5	0.40	0.33
3	0.75	0.60	0.5	0.43
4	0.80	0.67	0.57	0.5

Esta función asigna valores cercanos a 1 cuando $x \gg y$, 0.5 cuando $x = y$ y cercanos a 0 cuando $x \ll y$.

Considere $x, y \in \{1, 2, 3, 4\}$, la relación *"x es mucho mayor que y"* se puede representar mediante:

$$\mu_R(x, y) = \frac{x}{x + y}$$

x/y	1	2	3	4
1	0.5	0.33	0.25	0.20
2	0.67	0.5	0.40	0.33
3	0.75	0.60	0.5	0.43
4	0.80	0.67	0.57	0.5

Esta función asigna valores cercanos a 1 cuando $x \gg y$, 0.5 cuando $x = y$ y cercanos a 0 cuando $x \ll y$.

$$\mu_R(x, y) = \frac{1}{1 + e^{-\alpha(x-y-\beta)}}$$

Usando $\alpha = 2$ y $\beta = 1$:

x/y	1	2	3	4
1	0.12	0.02	0.00	0.00
2	0.50	0.12	0.02	0.00
3	0.88	0.50	0.12	0.02
4	0.98	0.88	0.50	0.12

Note que se puede ajustar cuán abrupta es la relación modificando los parámetros α y β.

Operaciones con relaciones difusas

i. **Intersección basada en t-normas:** Sea T una t-norma y sean $\mu_R(x,y)$ y $\mu_G(x,y)$ dos relaciones difusas binarias en $X \times Y$.

   La intersección de las relaciones difusas R y G es:

$$\mu_{R\cap G}(x,y) = T(\mu_R(x,y), \mu_G(x,y)), \quad (x,y) \in X \times Y$$

Operaciones con relaciones difusas

ii. Unión basada en t-conormas: Sea S una t-conorma y sean $\mu_R(x, y)$ y $\mu_G(x, y)$ dos relaciones difusas binarias en $X \times Y$.

La unión de las relaciones difusas R y G es:

$$\mu_{R \cup G}(x, y) = S(\mu_R(x, y), \mu_G(x, y)), \quad (x, y) \in X \times Y$$

Operaciones con relaciones difusas

iii. **Composición sup-T:** Sea T una t-norma y sean $\mu_R(x, y)$ y $\mu_G(y, z)$ dos relaciones difusas binarias definidas en $X \times Y$ y $Y \times Z$, respectivamente.

La composición sup-T de R y G, denotada por $\mu_{R \circ G}(y, z)$, se define como:

$$\mu_{R \circ G}(y, z) = \sup_{y \in Y} T(\mu_R(x, y), \mu_G(y, z)), \quad (x, y) \in X \times Y,$$
$$(y, z) \in Y \times Z$$

Ops con relaciones difusas - ejemplo

$R =$ "x es mucho menor que y", $G =$"x es muy cercano a y".

Ops con relaciones difusas - ejemplo

$R =$ “x es mucho menor que y”, $G =$“x es muy cercano a y”.

$$R(x,y) = \begin{array}{c|cccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & 0.5 & 0.1 & 0.1 & 0.7 \\ x_2 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ x_3 & 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{array} \qquad G(x,y) = \begin{array}{c|cccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & 0.4 & 0 & 0.9 & 0.6 \\ x_2 & 0.9 & 0.4 & 0.5 & 0.7 \\ x_3 & 0.3 & 0 & 0.8 & 0.5 \end{array}$$

Ops con relaciones difusas - ejemplo

$R =$ "x es mucho menor que y", $G =$"x es muy cercano a y".

$$R(x,y) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.1 & 0.7 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$G(x,y) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0.9 & 0.6 \\ 0.9 & 0.4 & 0.5 & 0.7 \\ 0.3 & 0 & 0.8 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(R \cap G)(x,y) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(R \cup G)(x,y) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

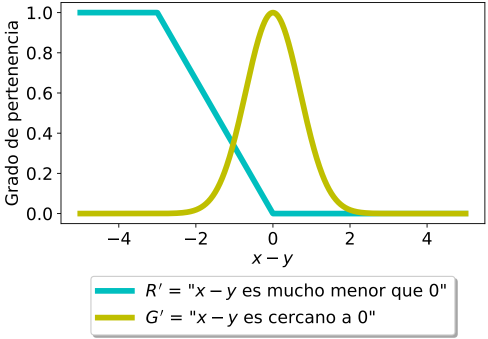
Ops con relaciones difusas - ejemplo

$R =$ "x es mucho menor que y", $G =$ "x es muy cercano a y".

Estas relaciones se pueden definir de la siguiente manera:

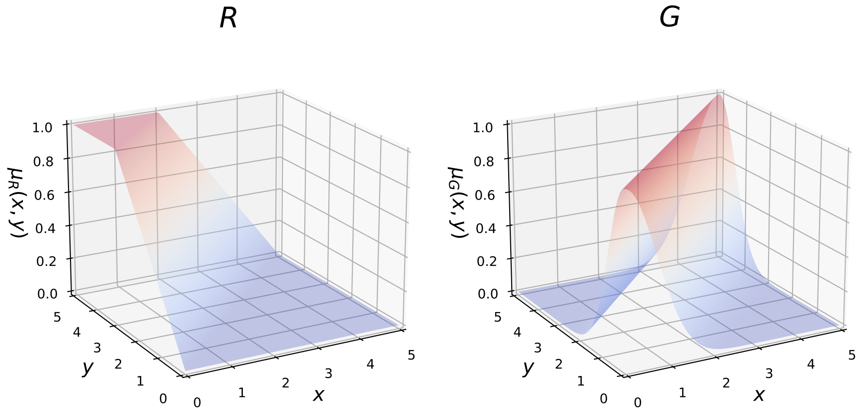
$$\mu_R(x,y) = e^{-(x-y)^2}$$

$$\mu_G(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{\alpha} & \text{si } \alpha < x-y \leq 0 \\ 1 & \text{si } x-y \geq \alpha \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



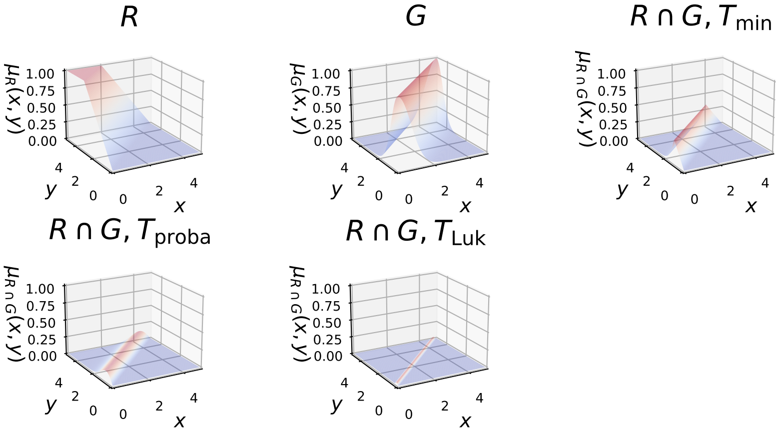
Ops con relaciones difusas - ejemplo

$R =$ "x es mucho menor que y", $G =$ "x es muy cercano a y".



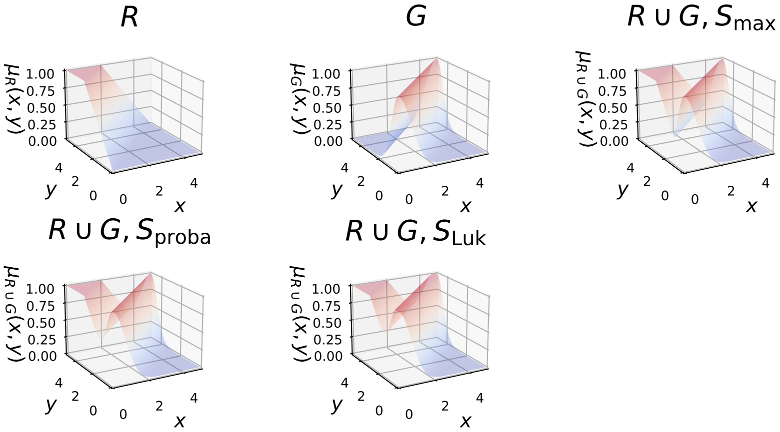
Ops con relaciones difusas - ejemplo

$R =$ “x es mucho menor que y”, $G =$“x es muy cercano a y”.



Ops con relaciones difusas - ejemplo

$R =$ "x es mucho menor que y", $G =$ "x es muy cercano a y".



Implicación

Una implicación difusa es una extensión de la implicación clásica $p \to q$.

Es una función de la forma $\mathbf{I} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$.

Para cualquier valor de verdad posible a y b de dos proposiciones difusas p y q, respectivamente, otorga el valor de verdad $\mathbf{I}(a,b)$ de la proposición condicional:

"si p, entonces q".

Implicación

Consideremos las dos proposiciones difusas $p =$ “x está en A’ ’ y q=”y está en B“, donde A y B son conjuntos difusos caracterizados por las MFs $\mu_A(x)$ y $\mu_B(y)$, respectivamente.

La afirmación de implicación $p \rightarrow q$ se representa mediante la MF

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \mathbf{I}(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

Implicación

- **S-implicaciones.** Surgen del formalismo booleano $p \to q \equiv \neg p \vee q$ y se definen como

$$\mathbf{I}(\mu_A(x), \mu_B(y)) = S(N(\mu_A(x)), \mu_B(y))$$

  S es una t-conorma y N es una negación. Ejemplos: Łukasiewicz y Kleene-Dienes.

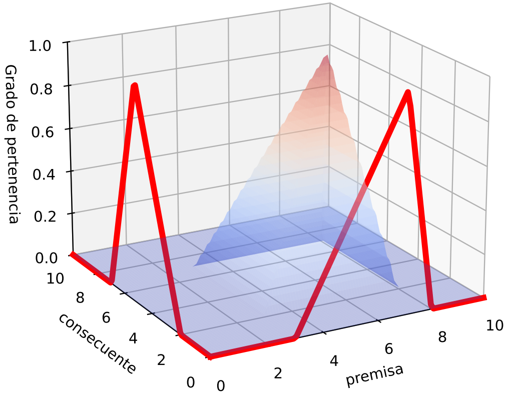
- **Implicaciones de t-norma.** Si T es una t-norma, entonces

$$\mathbf{I}(\mu_A(x), \mu_B(y)) = T(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

  Ejemplos: Mamdani y Larsen.

Operadores de implicación

Zadeh	$\mathbf{I}(x,y) = \max(1-x, \min(x,y))$
Łukasiewicz	$\mathbf{I}(x,y) = \min(1, 1-x+y)$
Mamdani	$\mathbf{I}(x,y) = \min(x,y)$
Larsen	$\mathbf{I}(x,y) = xy$
standard strict	$\mathbf{I}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
Gödel	$\mathbf{I}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ y & \text{en otro caso} \end{cases}$
Gaines	$\mathbf{I}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ \frac{y}{x} & \text{en otro caso} \end{cases}$
Kleene-Dienes	$\mathbf{I}(x,y) = \max(1-x, y)$
Kleene-Dienes-Łukasiewicz	$\mathbf{I}(x,y) = 1-x+xy$
Yager	$\mathbf{I}(x,y) = y^x$



1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
Grado de pertenencia
10
8
6
4
2
0
consecuente
0
2
4
6
8
10
premisa

Variables lingüísticas y razonamiento aproximado

Variables lingüísticas

Matemática $\rightarrow$ variables toman valores numéricos.

Variables lingüísticas

Matemática $\rightarrow$ variables toman valores numéricos.

Lógica difusa $\rightarrow$ variables toman valores en un lenguaje natural o artificial (Zadeh, 75).

Variables lingüísticas

Matemática $\rightarrow$ variables toman valores numéricos.

Lógica difusa $\rightarrow$ variables toman valores en un lenguaje natural o artificial (Zadeh, 75).

Por ejemplo, **”edad”** es una variable lingüística si sus valores son lingüísticos. Ejemplo:

edad $\in$ {joven, no joven, muy joven, bastante joven, viejo, no muy viejo y no muy joven, etc. }

Variables lingüísticas

Matemática $\rightarrow$ variables toman valores numéricos.

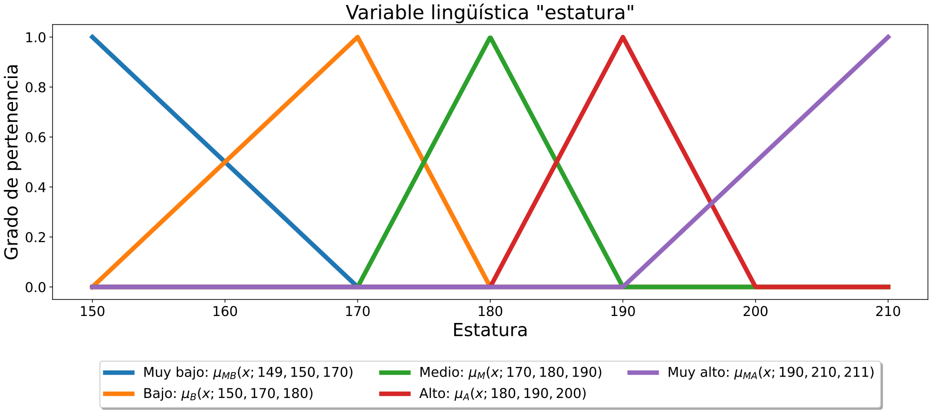
Lógica difusa $\rightarrow$ variables toman valores en un lenguaje natural o artificial (Zadeh, 75).

Por ejemplo, **”edad”** es una variable lingüística si sus valores son lingüísticos. Ejemplo:

edad $\in$ {joven, no joven, muy joven, bastante joven, viejo, no muy viejo y no muy joven, etc. }

Estos valores son llamados **términos lingüísticos** o **etiquetas lingüísticas**.

Variables lingüísticas - ejemplo



Variables lingüísticas

Las **variables lingüísticas** proporcionan un medio de caracterización aproximada de fenómenos que son difíciles de describir en términos **precisos**.

Variables lingüísticas

Las **variables lingüísticas** proporcionan un medio de caracterización aproximada de fenómenos que son difíciles de describir en términos **precisos**.

Es la base para el razonamiento aproximado (Zadeh, 1979).

Variables lingüísticas

Las **variables lingüísticas** proporcionan un medio de caracterización aproximada de fenómenos que son difíciles de describir en términos **precisos**.

Es la base para el razonamiento aproximado (Zadeh, 1979).

Principales aplicaciones del enfoque lingüístico se encuentran en el ámbito de los sistemas humanísticos.

Inteligencia artificial, procesos de toma de decisiones, reconocimiento de patrones, psicología, derecho, diagnóstico médico, recuperación de información, economía.

Razonamiento aproximado

La regla de inferencia más importante es el **modus ponens generalizado (GMP)**.

Razonamiento aproximado

La regla de inferencia más importante es el **modus ponens generalizado (GMP)**.

Esta regla de inferencia deriva de su contraparte clásica:

premisa	Si p entonces q

Razonamiento aproximado

La regla de inferencia más importante es el **modus ponens generalizado (GMP)**.

Esta regla de inferencia deriva de su contraparte clásica:

premisa	Si p entonces q
hecho	p

Razonamiento aproximado

La regla de inferencia más importante es el **modus ponens generalizado (GMP)**.

Esta regla de inferencia deriva de su contraparte clásica:

premisa	Si p entonces q
hecho	p
consecuencia	q

Razonamiento aproximado

La regla de inferencia más importante es el **modus ponens generalizado (GMP)**.

Esta regla de inferencia deriva de su contraparte clásica:

$$\begin{array}{ll} \text{premisa} & \text{Si } p \text{ entonces } q \\ \text{hecho} & p \\ \hline \text{consecuencia} & q \end{array}$$

Dada la regla $p \to q$:

Razonamiento aproximado

La regla de inferencia más importante es el **modus ponens generalizado (GMP)**.

Esta regla de inferencia deriva de su contraparte clásica:

premisa	Si p entonces q
hecho	p
consecuencia	q

Dada la regla $p \rightarrow q$:
Si p es verdadero, entonces q es verdadero.

Razonamiento aproximado

La regla de inferencia más importante es el **modus ponens generalizado (GMP)**.

Esta regla de inferencia deriva de su contraparte clásica:

premisa	Si p entonces q
hecho	p
consecuencia	q

Dada la regla $p \rightarrow q$:
Si p es verdadero, entonces q es verdadero.

Si $\neg q$ es verdadero, entonces se tiene $\neg p$.

Modus ponens generalizado

Modus ponens generalizado $\rightarrow$ se basa en la **regla de inferencia composicional** de Zadeh.

Modus ponens generalizado

Modus ponens generalizado $\rightarrow$ se basa en la **regla de inferencia composicional** de Zadeh.

premisa Si x es A entonces y es B

Modus ponens generalizado

Modus ponens generalizado $\rightarrow$ se basa en la **regla de inferencia composicional** de Zadeh.

premisa	Si x es A entonces y es B
hecho	x es $A^{'}$

Modus ponens generalizado

Modus ponens generalizado $\rightarrow$ se basa en la **regla de inferencia composicional** de Zadeh.

premisa	Si x es A entonces y es B
hecho	x es $A^{'}$
consecuencia	y es $B^{'}$

Modus ponens generalizado

Modus ponens generalizado $\rightarrow$ se basa en la **regla de inferencia composicional** de Zadeh.

premisa	Si x es A entonces y es B
hecho	x es $A^{'}$
consecuencia	y es $B^{'}$

A, $A^{'}$ son conjuntos difusos definidos en el mismo universo, pero no necesariamente son iguales. Lo mismo ocurre para B y $B^{'}$.

Modus ponens generalizado

Modus ponens generalizado $\rightarrow$ se basa en la **regla de inferencia composicional** de Zadeh.

premisa	Si x es A entonces y es B
hecho	x es $A^{'}$
consecuencia	y es $B^{'}$

A, $A^{'}$ son conjuntos difusos definidos en el mismo universo, pero no necesariamente son iguales. Lo mismo ocurre para B y $B^{'}$.

"Si x es A entonces y es B" y si ocurre el hecho $A^{'}$ (similar a A), se espera un evento $B^{'}$ (también similar a B).

premisa	Si x es A entonces y es B
hecho	x es A'
consecuencia	y es B'

¿Cómo calcular B'?

premisa	Si x es A entonces y es B
hecho	x es A'
consecuencia	y es B'

¿Cómo calcular B'? Combinando el hecho y la relación difusa resultante de la implicación. Esto es:

$$B' = A' \circ (A \to B)$$

premisa	Si x es A entonces y es B
hecho	x es A'
consecuencia	y es B'

¿Cómo calcular B'? Combinando el hecho y la relación difusa resultante de la implicación. Esto es:

$$B' = A' \circ (A \to B)$$

La MF de B' resultante es:

$$\mu_{B'}(y) = \sup_{x \in X} T\{\mu_{A'}(x), \mu_{A \to B}(x, y)\}, \quad y \in Y,$$

donde:

- T es una t-norma.
- $\mu_{A \to B}(x, y)$ resulta de evaluar algún operador de implicación en las MFs de A y B, esto es, $\mu_A(x)$ y $\mu_B(y)$, respectivamente.
- $\mu_{A'}(x)$ es la MF del conjunto A'.

premisa	Si x es A entonces y es B
hecho	x es A'
consecuencia	y es B'

¿Cómo calcular B'? Combinando el hecho y la relación difusa resultante de la implicación. Esto es:

$$B' = A' \circ (A \to B)$$

La MF de B' resultante es:

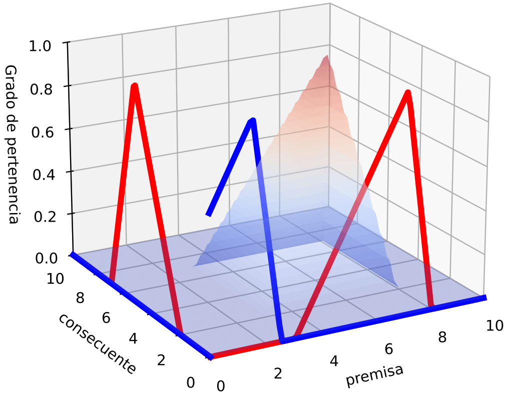
$$\mu_{B'}(y) = \sup_{x \in X} T\{\mu_{A'}(x), \mu_{A \to B}(x, y)\}, \quad y \in Y,$$

donde:

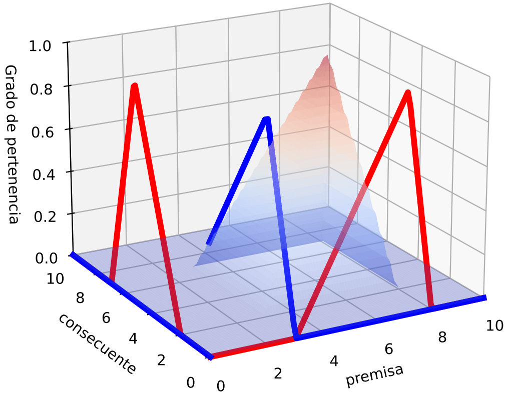
- T es una t-norma.
- $\mu_{A \to B}(x, y)$ resulta de evaluar algún operador de implicación en las MFs de A y B, esto es, $\mu_A(x)$ y $\mu_B(y)$, respectivamente.
- $\mu_{A'}(x)$ es la MF del conjunto A'.

Se puede verificar que el *modus ponens generalizado* es equivalente al *modus ponens clásico* cuando $A' = A$ y $B' = B$.

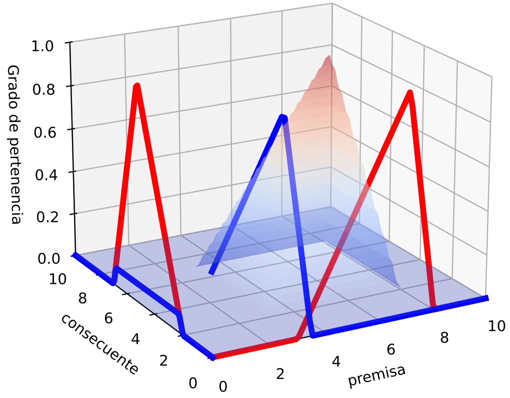
Razonamiento aproximado



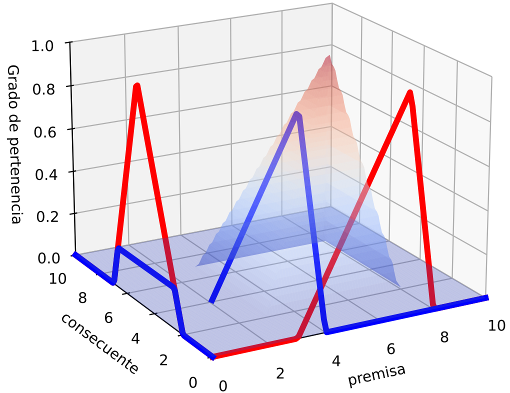
Razonamiento aproximado



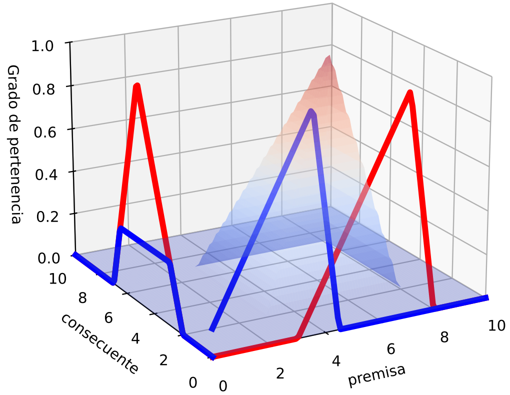
Razonamiento aproximado



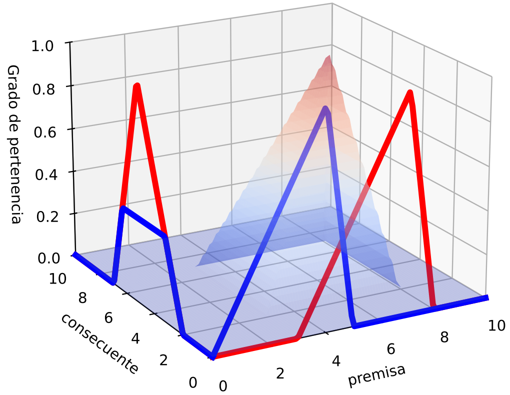
Razonamiento aproximado



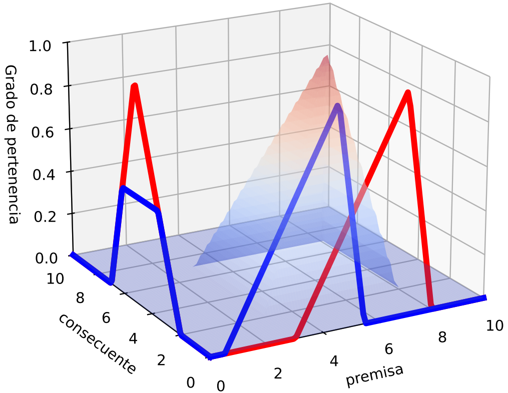
Razonamiento aproximado



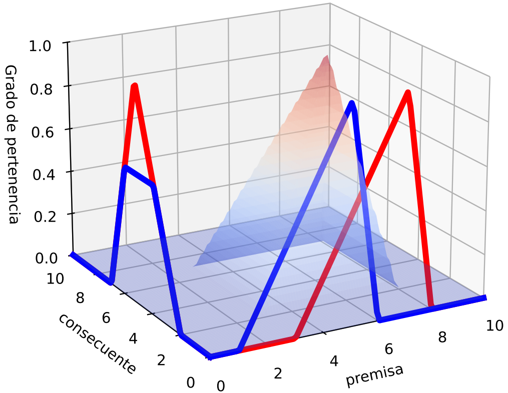
Razonamiento aproximado



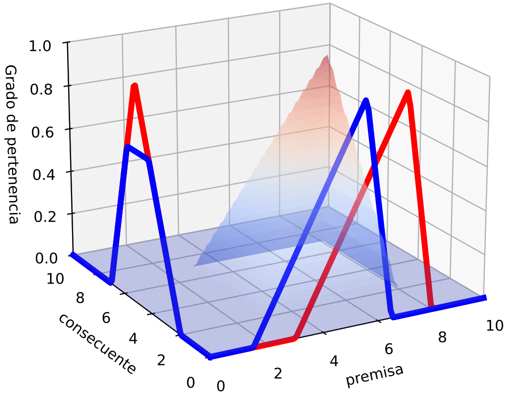
Razonamiento aproximado



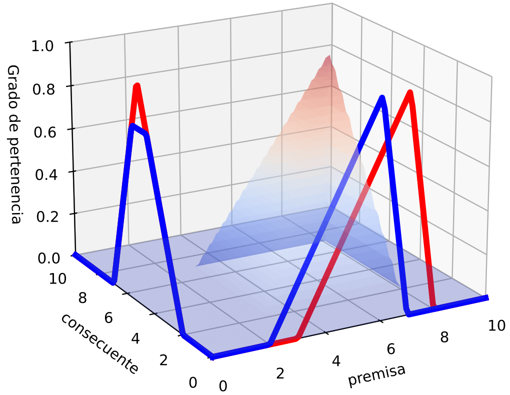
Razonamiento aproximado



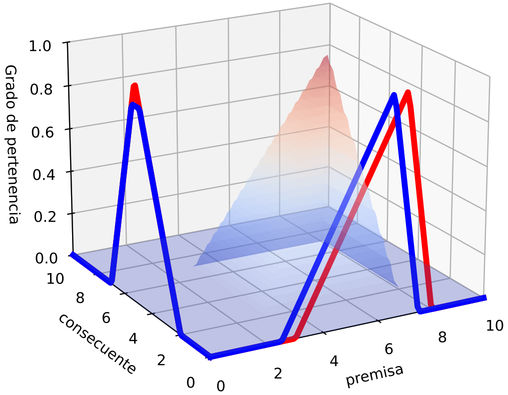
Razonamiento aproximado



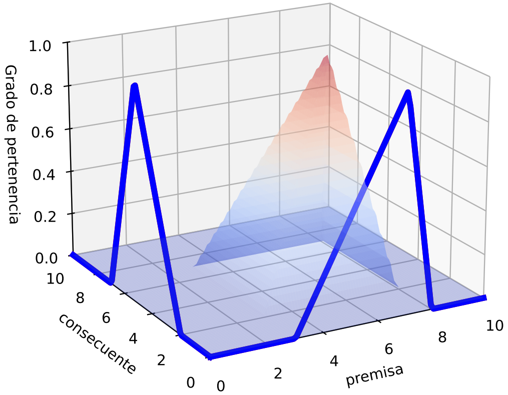
Razonamiento aproximado



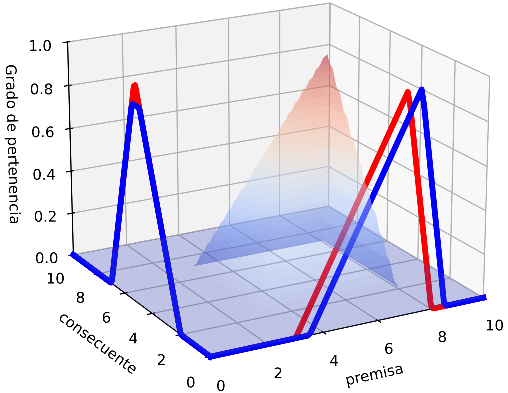
Razonamiento aproximado



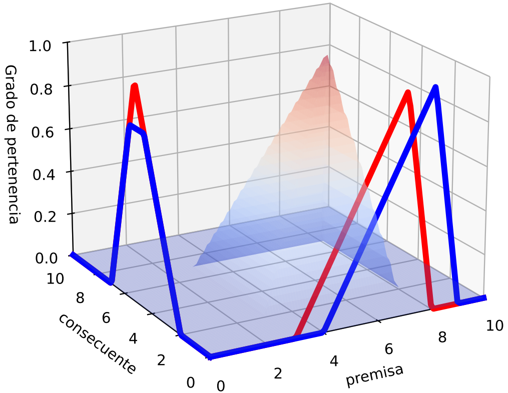
Razonamiento aproximado



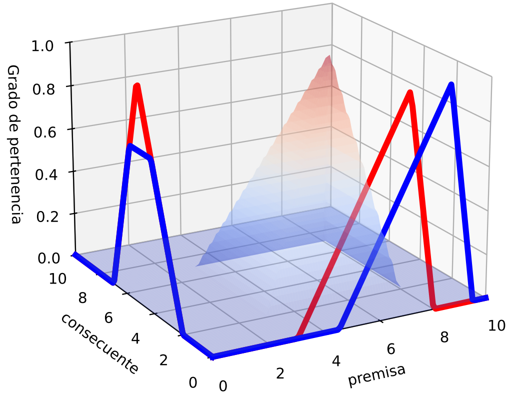
Razonamiento aproximado



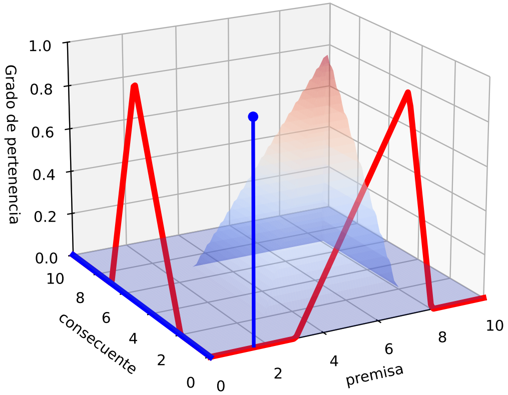
Razonamiento aproximado



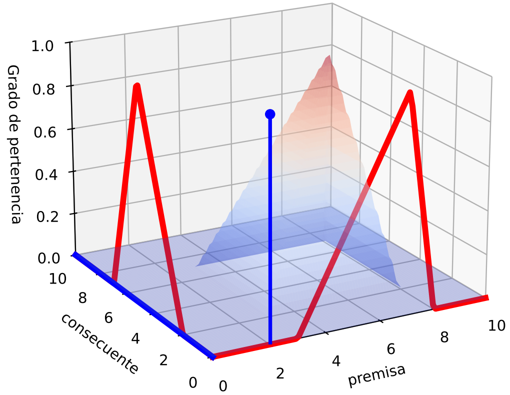
Razonamiento aproximado



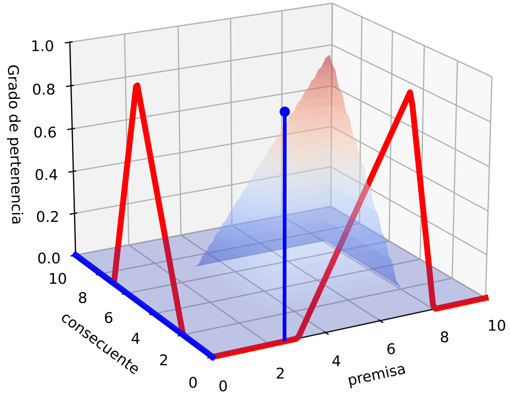
Razonamiento aproximado



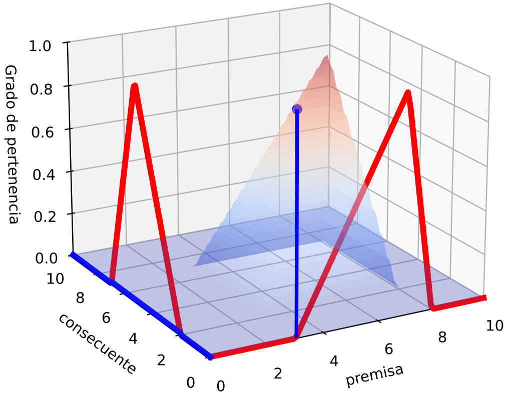
Razonamiento aproximado



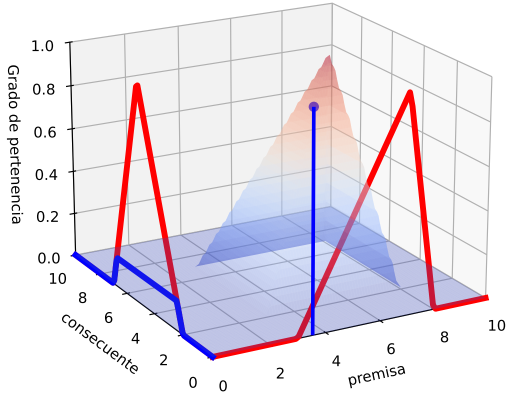
Razonamiento aproximado



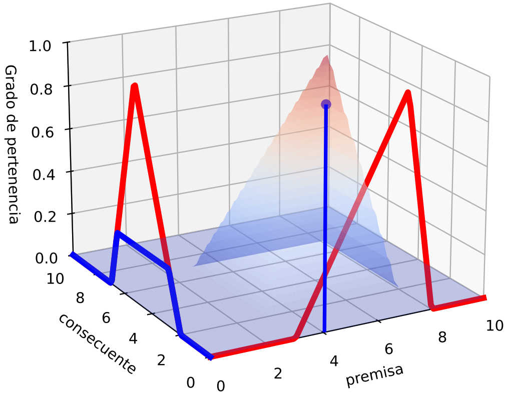
Razonamiento aproximado



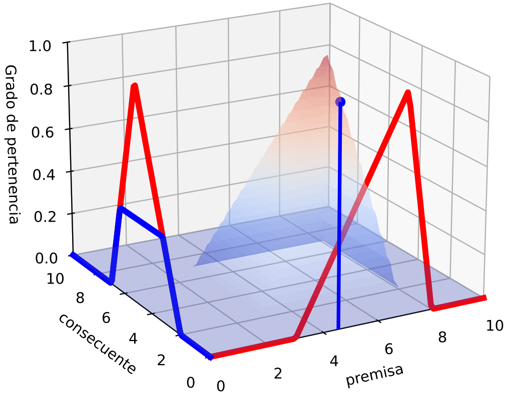
Razonamiento aproximado



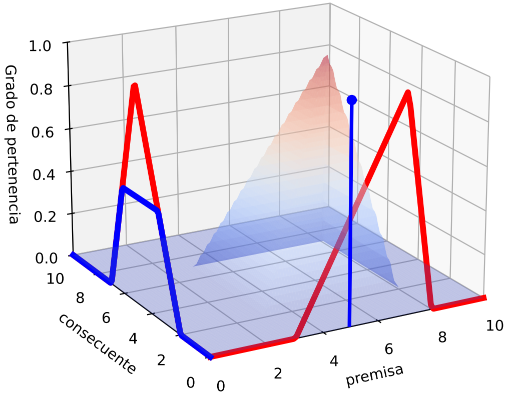
Razonamiento aproximado



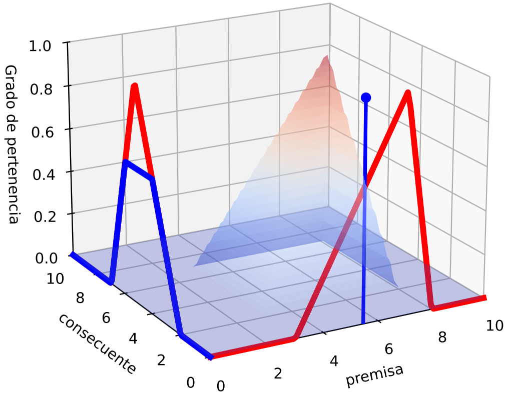
Razonamiento aproximado



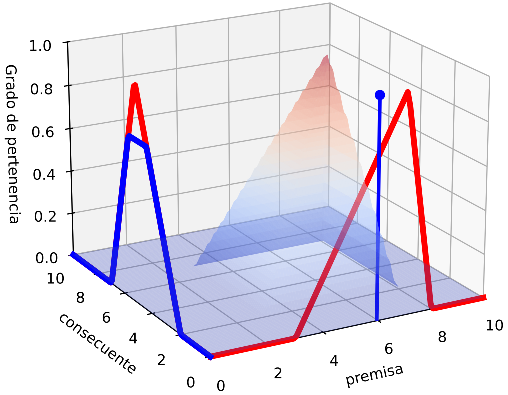
Razonamiento aproximado



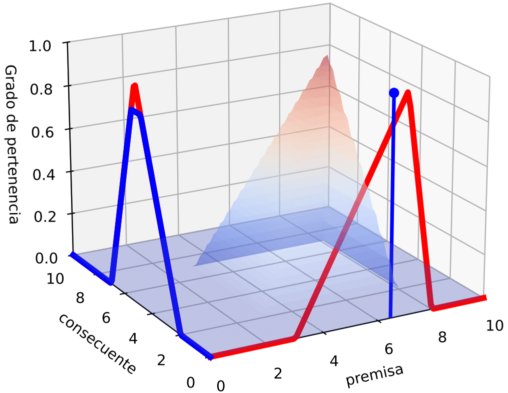
Razonamiento aproximado



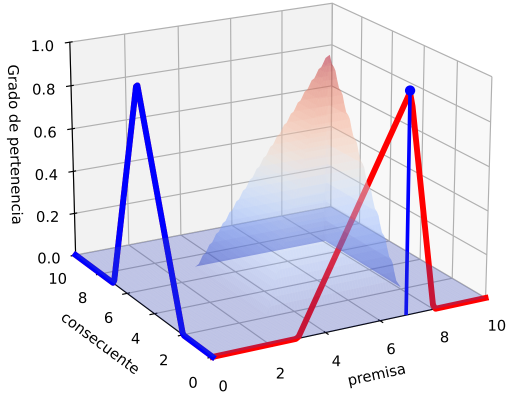
Razonamiento aproximado



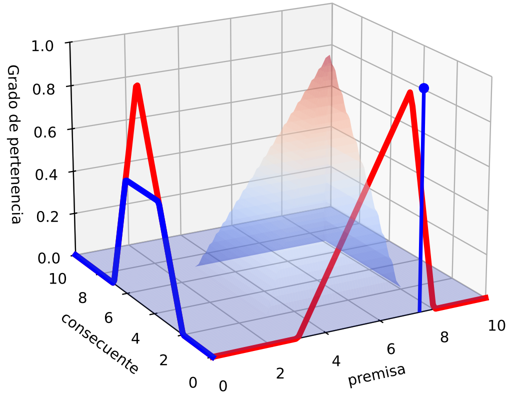
Razonamiento aproximado



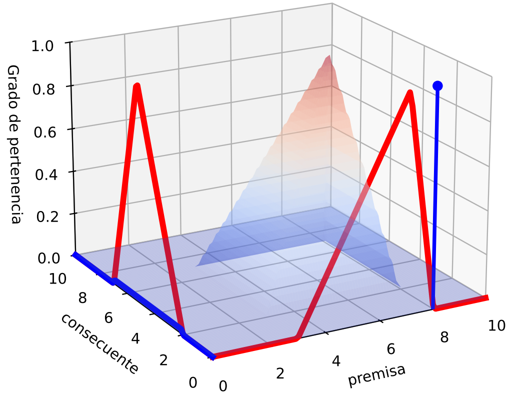
Razonamiento aproximado



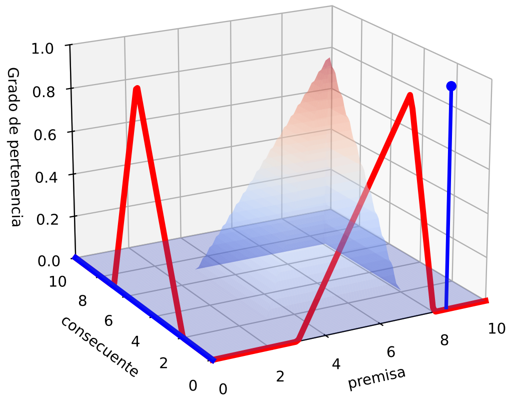
Razonamiento aproximado



Razonamiento aproximado



Razonamiento aproximado



Razonamiento aproximado

Los sistemas prácticos poseen varias reglas si-entonces y la parte antecedente es una conjunción o disyunción de proposiciones difusas.

Razonamiento aproximado

Los sistemas prácticos poseen varias reglas si-entonces y la parte antecedente es una conjunción o disyunción de proposiciones difusas.

Por ejemplo, "x es A **y** y es B" "x es A **o** y es B"

Razonamiento aproximado

Los sistemas prácticos poseen varias reglas si-entonces y la parte antecedente es una conjunción o disyunción de proposiciones difusas.

Por ejemplo, "x es A **y** y es B" "x es A **o** y es B"

Se evalúa la parte antecedente con t-normas o t-conormas según corresponda y se genera la relación de implicación para cada regla.

Razonamiento aproximado

Los sistemas prácticos poseen varias reglas si-entonces y la parte antecedente es una conjunción o disyunción de proposiciones difusas.

Por ejemplo, "x es A **y** y es B" "x es A **o** y es B"

Se evalúa la parte antecedente con t-normas o t-conormas según corresponda y se genera la relación de implicación para cada regla.

Las reglas son *agregadas* de dos posibles formas equivalentes:

Razonamiento aproximado

Los sistemas prácticos poseen varias reglas si-entonces y la parte antecedente es una conjunción o disyunción de proposiciones difusas.

Por ejemplo, "x es A **y** y es B" "x es A **o** y es B"

Se evalúa la parte antecedente con t-normas o t-conormas según corresponda y se genera la relación de implicación para cada regla.

Las reglas son *agregadas* de dos posibles formas equivalentes:

(a) Las relaciones difusas (reglas) se agregan primero y luego se aplica la regla de inferencia composicional.

Razonamiento aproximado

Los sistemas prácticos poseen varias reglas si-entonces y la parte antecedente es una conjunción o disyunción de proposiciones difusas.

Por ejemplo, "x es A **y** y es B" "x es A **o** y es B"

Se evalúa la parte antecedente con t-normas o t-conormas según corresponda y se genera la relación de implicación para cada regla.

Las reglas son *agregadas* de dos posibles formas equivalentes:

(a) Las relaciones difusas (reglas) se agregan primero y luego se aplica la regla de inferencia composicional.

(b) La regla de inferencia composicional se evalúa en cada regla y luego los conjuntos difusos resultantes se agregan.

Razonamiento aproximado

Considere la base de reglas:

$\mathcal{R}_1$ Si x es A_1 entonces y es C_1

Razonamiento aproximado

Considere la base de reglas:

$\mathcal{R}_1$	Si x es A_1 entonces y es C_1
$\mathcal{R}_2$	Si x es A_2 entonces y es C_2

Razonamiento aproximado

Considere la base de reglas:

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{R}_1 & \text{Si } x \text{ es } A_1 \text{ entonces } y \text{ es } C_1 \\
\mathcal{R}_2 & \text{Si } x \text{ es } A_2 \text{ entonces } y \text{ es } C_2 \\
\vdots & \vdots \\
\mathcal{R}_n & \text{Si } x \text{ es } A_n \text{ entonces } y \text{ es } C_n
\end{array}
$$

Razonamiento aproximado

Considere la base de reglas:

$\mathcal{R}_1$	Si x es A_1 entonces y es C_1
$\mathcal{R}_2$	Si x es A_2 entonces y es C_2
$\vdots$	$\vdots$
$\mathcal{R}_n$	Si x es A_n entonces y es C_n
Hecho:	x es A

Razonamiento aproximado

Considere la base de reglas:

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{R}_1 & \text{Si } x \text{ es } A_1 \text{ entonces } y \text{ es } C_1 \\
\mathcal{R}_2 & \text{Si } x \text{ es } A_2 \text{ entonces } y \text{ es } C_2 \\
\vdots & \vdots \\
\mathcal{R}_n & \text{Si } x \text{ es } A_n \text{ entonces } y \text{ es } C_n \\
\text{Hecho:} & x \text{ es } A \\
\hline
\text{Consecuencia:} & y \text{ es } C
\end{array}
$$

Razonamiento aproximado

Considere la base de reglas:

$\mathcal{R}_1$	Si x es A_1 entonces y es C_1
$\mathcal{R}_2$	Si x es A_2 entonces y es C_2
$\vdots$	$\vdots$
$\mathcal{R}_n$	Si x es A_n entonces y es C_n
Hecho:	x es A
Consecuencia:	y es C

$x \in X$ e $y \in Y$ son variables lingüísticas.

Razonamiento aproximado

Considere la base de reglas:

$\mathcal{R}_1$	Si x es A_1 entonces y es C_1
$\mathcal{R}_2$	Si x es A_2 entonces y es C_2
$\vdots$	$\vdots$
$\mathcal{R}_n$	Si x es A_n entonces y es C_n
Hecho:	x es A
Consecuencia:	y es C

$x \in X$ e $y \in Y$ son variables lingüísticas.

$\mathcal{T}(x) = \{A_1, \dots, A_n\}$ y $\mathcal{T}(y) = \{C_1, \dots, C_n\}$ son los términos lingüísticos de x y y, respectivamente.

Razonamiento aproximado

Se busca encontrar la función de membresía de la consecuencia C a partir de la base de reglas $\{\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n\}$ y el hecho A.

Razonamiento aproximado

Se busca encontrar la función de membresía de la consecuencia C a partir de la base de reglas $\{\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n\}$ y el hecho A.

La relación difusa (implicación) que representa la i-ésima regla difusa si-entonces es:

$$R_i(x, y) = \mathbf{I}(\mu_{A_i}(x), \mu_{C_i}(y))$$

$\mathbf{I}(\cdot)$ es un operador de implicación.

Razonamiento aproximado

Se busca encontrar la función de membresía de la consecuencia C a partir de la base de reglas $\{\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n\}$ y el hecho A.

La relación difusa (implicación) que representa la i-ésima regla difusa si-entonces es:

$$R_i(x, y) = \mathbf{I}(\mu_{A_i}(x), \mu_{C_i}(y))$$

$\mathbf{I}(\cdot)$ es un operador de implicación.

Luego, se aplica la **regla de inferencia composicional** para obtener el conjunto difuso resultante de **cada una** de las reglas difusas si-entonces del modelo.

Razonamiento aproximado

La función de membresía del conjunto difuso resultante a partir de la i-ésima regla, cuando se presenta el hecho A, es:

$$\mu_{C_i}(y) = \mu_{A \circ R_i}(y) = \sup_{x \in X} T(\mu_A(x), R_i(x, y)), \quad y \in Y,$$

donde T es una t-norma e $i = 1, \ldots, n$.

Razonamiento aproximado

La función de membresía del conjunto difuso resultante a partir de la i-ésima regla, cuando se presenta el hecho A, es:

$$\mu_{C_i}(y) = \mu_{A \circ R_i}(y) = \sup_{x \in X} T(\mu_A(x), R_i(x, y)), \quad y \in Y,$$

donde T es una t-norma e $i = 1, \ldots, n$.

Luego, se aplica una operación de agregación para calcular el conjunto difuso de salida general.

Razonamiento aproximado

Esta agregación se realiza utilizando un **conectivo** que puede ser una operación de tipo "y" (t-norma) o de "o" (t-conorma),

$$\mu_C(y) = \mathbf{Agg}(\mu_{C_1}(y), \ldots, \mu_{C_n}(y)), \quad y \in Y$$

$\mathbf{Agg}$ es el operador de agregación - asumiremos una t-conorma S.

El modelo Mamdani

El modelo Mamdani

También conocido como modelo difuso lingüístico $\rightarrow$ las entradas y salidas son variables lingüísticas.

El modelo Mamdani

También conocido como modelo difuso lingüístico $\rightarrow$ las entradas y salidas son variables lingüísticas.

Sean $x_1 \in X_1, \ldots, x_d \in X_d$ las variables lingüísticas de entrada.

El modelo Mamdani

También conocido como modelo difuso lingüístico $\rightarrow$ las entradas y salidas son variables lingüísticas.

Sean $x_1 \in X_1, \ldots, x_d \in X_d$ las variables lingüísticas de entrada.

Sea $y \in Y \subseteq \mathbb{R}$ una variable lingüística de salida.

El modelo Mamdani

También conocido como modelo difuso lingüístico $\to$ las entradas y salidas son variables lingüísticas.

Sean $x_1 \in X_1, \dots, x_d \in X_d$ las variables lingüísticas de entrada.

Sea $y \in Y \subseteq \mathbb{R}$ una variable lingüística de salida.

Términos lingüísticos:

$\mathcal{T}(x_1) = \{A_1^{(1)}, \dots, A_1^{(n)}\}$, ...,

El modelo Mamdani

También conocido como modelo difuso lingüístico $\rightarrow$ las entradas y salidas son variables lingüísticas.

Sean $x_1 \in X_1, \dots, x_d \in X_d$ las variables lingüísticas de entrada.

Sea $y \in Y \subseteq \mathbb{R}$ una variable lingüística de salida.

Términos lingüísticos:

$\mathcal{T}(x_1) = \{A_1^{(1)}, \dots, A_1^{(n)}\}, \dots,$

$\mathcal{T}(x_d) = \{A_d^{(1)}, \dots, A_d^{(n)}\},$

El modelo Mamdani

También conocido como modelo difuso lingüístico $\rightarrow$ las entradas y salidas son variables lingüísticas.

Sean $x_1 \in X_1, \ldots, x_d \in X_d$ las variables lingüísticas de entrada.

Sea $y \in Y \subseteq \mathbb{R}$ una variable lingüística de salida.

Términos lingüísticos:

$\mathcal{T}(x_1) = \{A_1^{(1)}, \ldots, A_1^{(n)}\}, \ldots,$

$\mathcal{T}(x_d) = \{A_d^{(1)}, \ldots, A_d^{(n)}\},$

$\mathcal{T}(y) = \{B_1, \ldots, B_n\}.$

El modelo Mamdani

También conocido como modelo difuso lingüístico $\rightarrow$ las entradas y salidas son variables lingüísticas.

Sean $x_1 \in X_1, \ldots, x_d \in X_d$ las variables lingüísticas de entrada.

Sea $y \in Y \subseteq \mathbb{R}$ una variable lingüística de salida.

Términos lingüísticos:
$\mathcal{T}(x_1) = \{A_1^{(1)}, \ldots, A_1^{(n)}\}, \ldots,$
$\mathcal{T}(x_d) = \{A_d^{(1)}, \ldots, A_d^{(n)}\},$
$\mathcal{T}(y) = \{B_1, \ldots, B_n\}.$

$\mu_j^{(i)}(x_j)$ es la función de membresía de $A_j^{(i)}$.

Considere la base de reglas:

Considere la base de regla:

$\mathcal{R}_1$ Si x_1 es $A_1^{(1)}$ y … y x_d es $A_d^{(1)}$ entonces y es B_1

Considere la base de reglas:

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{R}_1 & \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^{(1)} \text{ y} \ldots \text{ y } x_d \text{ es } A_d^{(1)} \text{ entonces} \quad y \text{ es } B_1 \\
\vdots & \vdots \\
\mathcal{R}_i & \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^{(i)} \text{ y} \ldots \text{ y } x_d \text{ es } A_d^{(i)} \text{ entonces} \quad y \text{ es } B_i
\end{array}
$$

Considere la base de reglas:

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{R}_1 & \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^{(1)} \text{ y} \ldots \text{ y } x_d \text{ es } A_d^{(1)} \text{ entonces} \quad y \text{ es } B_1 \\
\vdots & \vdots \\
\mathcal{R}_i & \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^{(i)} \text{ y} \ldots \text{ y } x_d \text{ es } A_d^{(i)} \text{ entonces} \quad y \text{ es } B_i \\
\vdots & \vdots \\
\mathcal{R}_n & \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^{(n)} \text{ y} \ldots \text{ y } x_d \text{ es } A_d^{(n)} \text{ entonces} \quad y \text{ es } B_n
\end{array}
$$

Considere la base de reglas:

$\mathcal{R}_1$	Si x_1 es $A_1^{(1)}$ y … y x_d es $A_d^{(1)}$ entonces y es B_1
$\vdots$	$\vdots$
$\mathcal{R}_i$	Si x_1 es $A_1^{(i)}$ y … y x_d es $A_d^{(i)}$ entonces y es B_i
$\vdots$	$\vdots$
$\mathcal{R}_n$	Si x_1 es $A_1^{(n)}$ y … y x_d es $A_d^{(n)}$ entonces y es B_n
hecho:	x_1 es $\bar{x}_1$ y … y x_d es $\bar{x}_d$

Considere la base de reglas:

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{R}_1 & \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^{(1)} \text{ y} \ldots \text{ y } x_d \text{ es } A_d^{(1)} \text{ entonces} \quad y \text{ es } B_1 \\
\vdots & \vdots \\
\mathcal{R}_i & \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^{(i)} \text{ y} \ldots \text{ y } x_d \text{ es } A_d^{(i)} \text{ entonces} \quad y \text{ es } B_i \\
\vdots & \vdots \\
\mathcal{R}_n & \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^{(n)} \text{ y} \ldots \text{ y } x_d \text{ es } A_d^{(n)} \text{ entonces} \quad y \text{ es } B_n \\
\text{hecho:} & x_1 \text{ es } \bar{x}_1 \text{ y} \ldots \text{ y } x_d \text{ es } \bar{x}_d \\
\hline
\text{consecuencia:} & \hat{y} \text{ es } B
\end{array}
$$

Considere la base de reglas:

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{R}_1 & \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^{(1)} \text{ y } \dots \text{ y } x_d \text{ es } A_d^{(1)} \text{ entonces } \quad y \text{ es } B_1 \\
\vdots & \vdots \\
\mathcal{R}_i & \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^{(i)} \text{ y } \dots \text{ y } x_d \text{ es } A_d^{(i)} \text{ entonces } \quad y \text{ es } B_i \\
\vdots & \vdots \\
\mathcal{R}_n & \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^{(n)} \text{ y } \dots \text{ y } x_d \text{ es } A_d^{(n)} \text{ entonces } \quad y \text{ es } B_n \\
\text{hecho:} & x_1 \text{ es } \bar{x}_1 \text{ y } \dots \text{ y } x_d \text{ es } \bar{x}_d \\
\hline
\text{consecuencia:} & \hat{y} \text{ es } B
\end{array}
$$

$\bar{x}_j, (j = 1, \dots, d)$, es un conjunto difuso que actúa como una interfaz nítido $\rightarrow$ difuso.

Considere la base de reglas:

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{R}_1 & \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^{(1)} \text{ y} \dots \text{ y } x_d \text{ es } A_d^{(1)} \text{ entonces} \quad y \text{ es } B_1 \\
\vdots & \vdots \\
\mathcal{R}_i & \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^{(i)} \text{ y} \dots \text{ y } x_d \text{ es } A_d^{(i)} \text{ entonces} \quad y \text{ es } B_i \\
\vdots & \vdots \\
\mathcal{R}_n & \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^{(n)} \text{ y} \dots \text{ y } x_d \text{ es } A_d^{(n)} \text{ entonces} \quad y \text{ es } B_n \\
\text{hecho:} & x_1 \text{ es } \bar{x}_1 \text{ y} \dots \text{ y } x_d \text{ es } \bar{x}_d \\
\hline
\text{consecuencia:} & \hat{y} \text{ es } B
\end{array}
$$

$\bar{x}_j, (j = 1, \dots, d)$, es un conjunto difuso que actúa como una interfaz nítido $\rightarrow$ difuso.

Convierte un valor nítido/numérico de x_1 en un valor difuso mediante la función de pertenencia $\mu_{\bar{x}_j}(x_j)$.

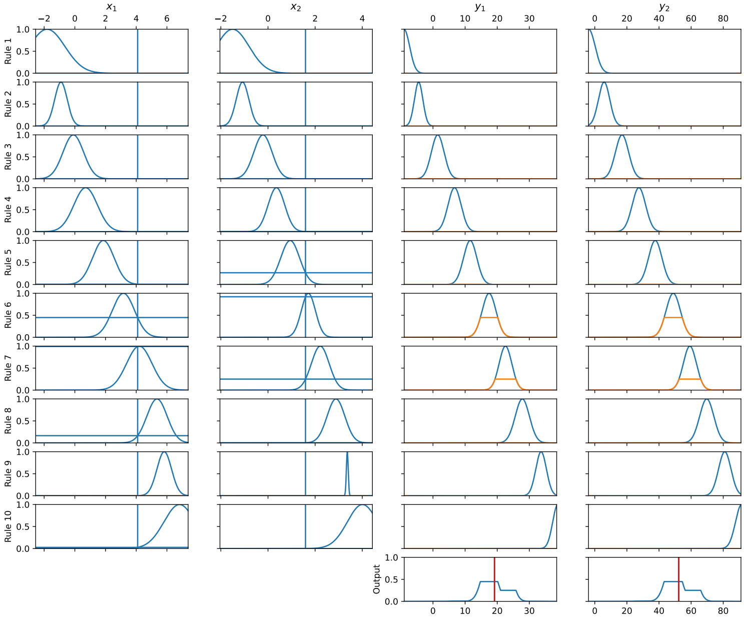
Considere la base de reglas:

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{R}_1 & \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^{(1)} \text{ y } \dots \text{ y } x_d \text{ es } A_d^{(1)} \text{ entonces } \quad y \text{ es } B_1 \\
\vdots & \vdots \\
\mathcal{R}_i & \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^{(i)} \text{ y } \dots \text{ y } x_d \text{ es } A_d^{(i)} \text{ entonces } \quad y \text{ es } B_i \\
\vdots & \vdots \\
\mathcal{R}_n & \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^{(n)} \text{ y } \dots \text{ y } x_d \text{ es } A_d^{(n)} \text{ entonces } \quad y \text{ es } B_n \\
\text{hecho:} & x_1 \text{ es } \bar{x}_1 \text{ y } \dots \text{ y } x_d \text{ es } \bar{x}_d \\
\hline
\text{consecuencia:} & \hat{y} \text{ es } B
\end{array}
$$

$\bar{x}_j, (j = 1, \dots, d)$, es un conjunto difuso que actúa como una interfaz nítido $\rightarrow$ difuso.

Convierte un valor nítido/numérico de x_1 en un valor difuso mediante la función de pertenencia $\mu_{\bar{x}_j}(x_j)$.

$\hat{y}$ es el valor inferido a partir de los valores de $x_1, \dots, x_d$, denotados por $x'_1, \dots, x'_d$, se realiza mediante el GMP.


x_1
x_2
y_1
y_2
Rule 1
Rule 2
Rule 3
Rule 4
Rule 5
Rule 6
Rule 7
Rule 8
Rule 9
Rule 10
Output

Usando el GMP podemos inferir B a partir de la base de reglas disponible y el hecho.

Usando el GMP podemos inferir B a partir de la base de reglas disponible y el hecho.

El valor final $\hat{y}$ se calculará aplicando un método de desfusificación (conjunto difuso a un valor nítido).

$$R_i(x_1, \ldots, x_d, y) = \mathbf{I}\left(\underbrace{\min_{j \in 1,\ldots,d}\left(\mu_{A_j^{(i)}}(x_j)\right)}_{\text{t-norma}},\ \mu_{B_i}(y)\right)$$

donde el operador $\mathbf{I}(\cdot)$ es la implicación.

Para aplicar la regla de inferencia composicional, el hecho "x_1 es $\bar{x}_1$ y … y x_d es $\bar{x}_d$" debe ser representado por la t-norma.

Para aplicar la regla de inferencia composicional, el hecho “x_1 es $\bar{x}_1$ y … y x_d es $\bar{x}_d$” debe ser representado por la t-norma.

Esto requiere que se conozcan las funciones de membresía de los conjuntos difusos $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d$.

Para aplicar la regla de inferencia composicional, el hecho “x_1 es $\bar{x}_1$ y … y x_d es $\bar{x}_d$” debe ser representado por la t-norma.

Esto requiere que se conozcan las funciones de membresía de los conjuntos difusos $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_d$.

Comúnmente, se utilizan conjuntos difusos singleton para este propósito, es decir, $\mu_{\bar{x}_j}(x_j) = 1$ solo cuando $x_j = x_j^{'}$ y 0 en caso contrario.

Para aplicar la regla de inferencia composicional, el hecho "x_1 es $\bar{x}_1$ y ... y x_d es $\bar{x}_d$" debe ser representado por la t-norma.

Esto requiere que se conozcan las funciones de membresía de los conjuntos difusos $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_d$.

Comúnmente, se utilizan conjuntos difusos singleton para este propósito, es decir, $\mu_{\bar{x}_j}(x_j) = 1$ solo cuando $x_j = x_j^{'}$ y 0 en caso contrario.

Para los valores de entrada $x_1 = x_1^{'}, \ldots, x_d = x_d^{'}$, el conjunto difuso resultante de la combinación del hecho y la regla i-ésima es:

$$\mu_{B_i'}(y) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \mathbf{T} \left\{ \mathop{\mathbf{T}}_{j=1}^{d} (\mu_{\bar{x}_j}(x_j^{'})), R_i(\mathbf{x}, y) \right\}, \quad y \in Y,$$

donde $\mathbf{T}(\cdot)$ es una t-norma, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ y $\mathcal{X} = X_1 \times \ldots \times X_d$.

$$\mu_{B_i'}(y) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \mathbf{T} \left\{ \mathop{\mathbf{T}}_{j=1}^{d} (\mu_{\bar{x}_j}(x_j^{'})), R_i(\mathbf{x}, y) \right\}, \quad y \in Y,$$

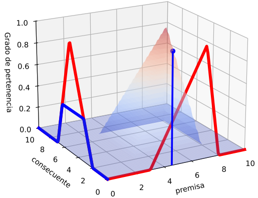
$$\mu_{B_i'}(y) = \sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}} \mathbf{T}\left\{\mathop{\mathbf{T}}_{j=1}^{d}(\mu_{\bar{x}_j}(x_j^{'})), R_i(\mathbf{x}, y)\right\}, \quad y \in Y,$$

Teniendo en cuenta $\mathbf{T}(a, 1) = a$ y $\mu_{\bar{x}_j}(x_j)$, $j = 1, \dots, d$, son conjuntos difusos singleton, tenemos:

$$\mu_{B_i'}(y) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \mathbf{T} \left\{ \mathop{\mathbf{T}}_{j=1}^{d} (\mu_{\bar{x}_j}(x_j^{'})), R_i(\mathbf{x}, y) \right\}, \quad y \in Y,$$

Teniendo en cuenta $\mathbf{T}(a, 1) = a$ y $\mu_{\bar{x}_j}(x_j)$, $j = 1, \ldots, d$, son conjuntos difusos singleton, tenemos:

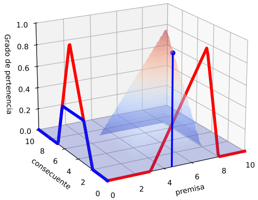
$$\mu_{B_i'}(y) = R_i(\mathbf{x}^{'}, y),$$
$$y \in Y, \mathbf{x}^{'} \in \mathcal{X}$$



$$\mu_{B_i'}(y) = \sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}} \mathbf{T}\left\{\mathop{\mathbf{T}}_{j=1}^{d}(\mu_{\bar{x}_j}(x_j^{'})), R_i(\mathbf{x}, y)\right\}, \quad y \in Y,$$

Teniendo en cuenta $\mathbf{T}(a, 1) = a$ y $\mu_{\bar{x}_j}(x_j)$, $j = 1, \ldots, d$, son conjuntos difusos singleton, tenemos:

$$\mu_{B_i'}(y) = R_i(\mathbf{x}^{'}, y),$$
$$y \in Y, \mathbf{x}^{'} \in \mathcal{X}$$



El conjunto difuso resultante del modelo es:

$$\mu_B(y) = \mathbf{Agg}(\mu_{B_1'}(y), \ldots, \mu_{B_n'}(y)), \qquad y \in Y,$$

$\mathbf{Agg}$ es el operador de agregación (t-conorma S).

Para resumir, el conjunto difuso B se calcula:

(i) Calcular la relación difusa de cada regla.

Para resumir, el conjunto difuso B se calcula:

(i) Calcular la relación difusa de cada regla.

Primero, se calcula la t-norma de las premisas (nivel de activación de la regla i).

Para resumir, el conjunto difuso B se calcula:

(i) Calcular la relación difusa de cada regla.

Primero, se calcula la t-norma de las premisas (nivel de activación de la regla i).

Si se utiliza el operador min como t-norma, el nivel de activación de la i-ésima regla es:

$$\alpha_i = \min(\mu_1^{(i)}(x_1'), \ldots, \mu_d^{(i)}(x_d')).$$

Para resumir, el conjunto difuso B se calcula:

(i) Calcular la relación difusa de cada regla.

Primero, se calcula la t-norma de las premisas (nivel de activación de la regla i).

Si se utiliza el operador min como t-norma, el nivel de activación de la i-ésima regla es:

$$\alpha_i = \min(\mu_1^{(i)}(x_1'), \ldots, \mu_d^{(i)}(x_d')).$$

(ii) Se evalúa el operador de implicación y se calcula el conjunto difuso de salida de la i-ésima regla:

$$\mu_{B_i'}(y) = \mathbf{I}(\alpha_i, \mu_{B_i}(y)), \quad \forall y \in Y$$

$\mathbf{I}(\cdot)$ es el operador de implicación (min).

(iii) Calcular el conjunto difuso resultante B agregando los conjuntos difusos obtenidos para cada regla en el paso anterior.

(iii) Calcular el conjunto difuso resultante B agregando los conjuntos difusos obtenidos para cada regla en el paso anterior.

(iv) Calcular el valor de $\widehat{y}$ mediante cualquier método de des-fusificación.

(iii) Calcular el conjunto difuso resultante B agregando los conjuntos difusos obtenidos para cada regla en el paso anterior.

(iv) Calcular el valor de $\widehat{y}$ mediante cualquier método de des-fusificación.

Por ejemplo, si se aplica el método habitual de Centro-de-Área/Gravedad, el valor inferido es:

$$\widehat{y} = \frac{\int_Y y\mu_B(y)dy}{\int_Y \mu_B(y)dy}$$

El modelo Takagi-Sugeno-Kang (TSK)

El modelo Takagi-Sugeno-Kang (TSK)

El modelo TSK es una combinación de un modelo lógico y matemático.

El modelo Takagi-Sugeno-Kang (TSK)

El modelo TSK es una combinación de un modelo lógico y matemático.

Se usa la filosofía “dividir y conquistar”.

El modelo Takagi-Sugeno-Kang (TSK)

El modelo TSK es una combinación de un modelo lógico y matemático.

Se usa la filosofía “dividir y conquistar”.

El **antecedente** de las reglas borrosas **divide** el espacio de entrada en varias regiones locales difusas, mientras que los **consecuentes** describen el comportamiento **dentro de una región** dada.

La base de reglas de un modelo TSK se puede expresar como:

$\mathcal{R}_1$ Si x_1 es $A_1^{(1)}$ y ... y x_d es $A_d^{(1)}$ entonces

$$f_1(\mathbf{x}, \Theta^{(1)}) = \theta_0^{(1)} + \theta_1^{(1)} x_1 + \cdots + \theta_d^{(1)} x_d = \Theta_1' \mathbf{x}$$

La base de reglas de un modelo TSK se puede expresar como:

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{R}_1 & \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^{(1)} \text{ y } \ldots \text{ y } x_d \text{ es } A_d^{(1)} \text{ entonces} \\
 & \quad f_1(\mathbf{x}, \Theta^{(1)}) = \theta_0^{(1)} + \theta_1^{(1)} x_1 + \cdots + \theta_d^{(1)} x_d = \Theta_1' \mathbf{x} \\
\vdots & \vdots \\
\mathcal{R}_i & \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^{(i)} \text{ y } \ldots \text{ y } x_d \text{ es } A_d^{(i)} \text{ entonces} \\
 & \quad f_i(\mathbf{x}, \Theta^{(i)}) = \theta_0^{(i)} + \theta_1^{(i)} x_1 + \cdots + \theta_d^{(i)} x_d = \Theta_i' \mathbf{x} \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

La base de reglas de un modelo TSK se puede expresar como:

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{R}_1 & \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^{(1)} \text{ y} \ldots \text{ y } x_d \text{ es } A_d^{(1)} \text{ entonces} \\
 & \quad f_1(\mathbf{x}, \Theta^{(1)}) = \theta_0^{(1)} + \theta_1^{(1)} x_1 + \cdots + \theta_d^{(1)} x_d = \Theta_1' \mathbf{x} \\
\vdots & \vdots \\
\mathcal{R}_i & \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^{(i)} \text{ y} \ldots \text{ y } x_d \text{ es } A_d^{(i)} \text{ entonces} \\
 & \quad f_i(\mathbf{x}, \Theta^{(i)}) = \theta_0^{(i)} + \theta_1^{(i)} x_1 + \cdots + \theta_d^{(i)} x_d = \Theta_i' \mathbf{x} \\
\vdots & \vdots \\
\mathcal{R}_n & \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^{(n)} \text{ y} \ldots \text{ y } x_d \text{ es } A_d^{(n)} \text{ entonces} \\
 & \quad f_n(\mathbf{x}, \Theta^{(n)}) = \theta_0^{(n)} + \theta_1^{(n)} x_1 + \cdots + \theta_d^{(n)} x_d = \Theta_n' \mathbf{x}
\end{array}
$$

La base de reglas de un modelo TSK se puede expresar como:

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{R}_1 & \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^{(1)} \text{ y} \ldots \text{ y } x_d \text{ es } A_d^{(1)} \text{ entonces} \\
 & \quad f_1(\mathbf{x}, \Theta^{(1)}) = \theta_0^{(1)} + \theta_1^{(1)} x_1 + \cdots + \theta_d^{(1)} x_d = \Theta_1' \mathbf{x} \\
\vdots & \vdots \\
\mathcal{R}_i & \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^{(i)} \text{ y} \ldots \text{ y } x_d \text{ es } A_d^{(i)} \text{ entonces} \\
 & \quad f_i(\mathbf{x}, \Theta^{(i)}) = \theta_0^{(i)} + \theta_1^{(i)} x_1 + \cdots + \theta_d^{(i)} x_d = \Theta_i' \mathbf{x} \\
\vdots & \vdots \\
\mathcal{R}_n & \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^{(n)} \text{ y} \ldots \text{ y } x_d \text{ es } A_d^{(n)} \text{ entonces} \\
 & \quad f_n(\mathbf{x}, \Theta^{(n)}) = \theta_0^{(n)} + \theta_1^{(n)} x_1 + \cdots + \theta_d^{(n)} x_d = \Theta_n' \mathbf{x} \\
\text{hecho:} & x_1 = x_1' \text{ y} \ldots \text{ y } x_d = x_d' \\
\hline
\end{array}
$$

La base de reglas de un modelo TSK se puede expresar como:

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{R}_1 & \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^{(1)} \text{ y ... y } x_d \text{ es } A_d^{(1)} \text{ entonces} \\
 & \quad f_1(\mathbf{x}, \Theta^{(1)}) = \theta_0^{(1)} + \theta_1^{(1)} x_1 + \cdots + \theta_d^{(1)} x_d = \Theta_1' \mathbf{x} \\
\vdots & \vdots \\
\mathcal{R}_i & \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^{(i)} \text{ y ... y } x_d \text{ es } A_d^{(i)} \text{ entonces} \\
 & \quad f_i(\mathbf{x}, \Theta^{(i)}) = \theta_0^{(i)} + \theta_1^{(i)} x_1 + \cdots + \theta_d^{(i)} x_d = \Theta_i' \mathbf{x} \\
\vdots & \vdots \\
\mathcal{R}_n & \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^{(n)} \text{ y ... y } x_d \text{ es } A_d^{(n)} \text{ entonces} \\
 & \quad f_n(\mathbf{x}, \Theta^{(n)}) = \theta_0^{(n)} + \theta_1^{(n)} x_1 + \cdots + \theta_d^{(n)} x_d = \Theta_n' \mathbf{x} \\
\text{hecho:} & x_1 = x_1' \text{ y ... y } x_d = x_d' \\
\hline
\text{consecuencia:} & \hat{y}
\end{array}
$$

$(x_1', \dots, x_d')$ es una realización del vector de entrada $(x_1, \dots, x_d)$.

La base de reglas de un modelo TSK se puede expresar como:

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{R}_1 & \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^{(1)} \text{ y ... y } x_d \text{ es } A_d^{(1)} \text{ entonces} \\
 & \quad f_1(\mathbf{x}, \Theta^{(1)}) = \theta_0^{(1)} + \theta_1^{(1)} x_1 + \cdots + \theta_d^{(1)} x_d = \Theta_1' \mathbf{x} \\
\vdots & \vdots \\
\mathcal{R}_i & \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^{(i)} \text{ y ... y } x_d \text{ es } A_d^{(i)} \text{ entonces} \\
 & \quad f_i(\mathbf{x}, \Theta^{(i)}) = \theta_0^{(i)} + \theta_1^{(i)} x_1 + \cdots + \theta_d^{(i)} x_d = \Theta_i' \mathbf{x} \\
\vdots & \vdots \\
\mathcal{R}_n & \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^{(n)} \text{ y ... y } x_d \text{ es } A_d^{(n)} \text{ entonces} \\
 & \quad f_n(\mathbf{x}, \Theta^{(n)}) = \theta_0^{(n)} + \theta_1^{(n)} x_1 + \cdots + \theta_d^{(n)} x_d = \Theta_n' \mathbf{x} \\
\text{hecho:} & x_1 = x_1' \text{ y ... y } x_d = x_d' \\
\hline
\text{consecuencia:} & \hat{y}
\end{array}
$$

$(x_1', \ldots, x_d')$ es una realización del vector de entrada $(x_1, \ldots, x_d)$.

Estos valores se evalúan en las proposiciones del antecedente "x_1 es $A_1^{(i)}$", ..., "x_d es $A_d^{(i)}$" de cada regla, esto es, $\mu_1^{(i)}(x_1'), \ldots, \mu_d^{(i)}(x_d')$.

Luego, los valores $\mu_1^{(i)}(x'_1), \dots, \mu_d^{(i)}(x'_d)$ se combinan utilizando una t-norma (conectivo ”y”) del antecedente de la regla.

Luego, los valores $\mu_1^{(i)}(x'_1), \ldots, \mu_d^{(i)}(x'_d)$ se combinan utilizando una t-norma (conectivo ”y”) del antecedente de la regla.

El resultado de esta operación es el nivel de activación de la regla i-ésima y se calcula mediante:

$$w_i = \mathop{\mathbf{T}}_{j=1}^{d} (\mu_j^{(i)}(x'_j)).$$

Luego, los valores $\mu_1^{(i)}(x'_1), \ldots, \mu_d^{(i)}(x'_d)$ se combinan utilizando una t-norma (conectivo "y") del antecedente de la regla.

El resultado de esta operación es el nivel de activación de la regla i-ésima y se calcula mediante:

$$w_i = \mathop{\mathbf{T}}_{j=1}^{d}(\mu_j^{(i)}(x'_j)).$$

La salida de cada regla se evalúa con la función lineal del consecuente:

$$f_i(\mathbf{x}, \Theta^{(i)}) = \theta_0^{(i)} + \theta_1^{(i)} x'_1 + \cdots + \theta_d^{(i)} x'_d,$$

Luego, los valores $\mu_1^{(i)}(x_1'), \dots, \mu_d^{(i)}(x_d')$ se combinan utilizando una t-norma (conectivo ”y”) del antecedente de la regla.

El resultado de esta operación es el nivel de activación de la regla i-ésima y se calcula mediante:

$$w_i = \mathop{\mathbf{T}}_{j=1}^{d}(\mu_j^{(i)}(x_j')).$$

La salida de cada regla se evalúa con la función lineal del consecuente:

$$f_i(\mathbf{x}, \Theta^{(i)}) = \theta_0^{(i)} + \theta_1^{(i)} x_1' + \cdots + \theta_d^{(i)} x_d',$$

$\Theta^{(i)} = (\theta_0^{(i)}, \theta_1^{(i)}, \dots, \theta_d^{(i)})$ es el conjunto de parámetros del consecuente de la regla i-ésima.

Luego, los valores $\mu_1^{(i)}(x_1'), \dots, \mu_d^{(i)}(x_d')$ se combinan utilizando una t-norma (conectivo "y") del antecedente de la regla.

El resultado de esta operación es el nivel de activación de la regla i-ésima y se calcula mediante:

$$w_i = \mathop{\mathbf{T}}_{j=1}^{d} (\mu_j^{(i)}(x_j')).$$

La salida de cada regla se evalúa con la función lineal del consecuente:

$$f_i(\mathbf{x}, \Theta^{(i)}) = \theta_0^{(i)} + \theta_1^{(i)} x_1' + \dots + \theta_d^{(i)} x_d',$$

$\Theta^{(i)} = (\theta_0^{(i)}, \theta_1^{(i)}, \dots, \theta_d^{(i)})$ es el conjunto de parámetros del consecuente de la regla i-ésima.

Finalmente, la salida de cada regla (activada) se agrega de la forma:

$$\hat{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \sum_{i=1}^{n} \bar{w}_i f_i,$$

Luego, los valores $\mu_1^{(i)}(x_1'), \ldots, \mu_d^{(i)}(x_d')$ se combinan utilizando una t-norma (conectivo ”y”) del antecedente de la regla.

El resultado de esta operación es el nivel de activación de la regla i-ésima y se calcula mediante:

$$w_i = \mathop{\mathbf{T}}_{j=1}^{d}(\mu_j^{(i)}(x_j')).$$

La salida de cada regla se evalúa con la función lineal del consecuente:

$$f_i(\mathbf{x}, \Theta^{(i)}) = \theta_0^{(i)} + \theta_1^{(i)} x_1' + \cdots + \theta_d^{(i)} x_d',$$

$\Theta^{(i)} = (\theta_0^{(i)}, \theta_1^{(i)}, \ldots, \theta_d^{(i)})$ es el conjunto de parámetros del consecuente de la regla i-ésima.

Finalmente, la salida de cada regla (activada) se agrega de la forma:

$$\hat{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \sum_{i=1}^{n} \bar{w}_i f_i,$$

$\bar{w}_i$ se denomina nivel de activación normalizado de la regla i-ésima.

Partición del espacio de entrada

Tres formas típicas:

Grid partitioning

Tree partitioning

Scatter partitioning

Entrenamiento

a. ¿Cómo encontrar el conjunto de parámetros del modelo, es decir, los parámetros de las funciones de membresía y los parámetros del consecuente de los modelos TSK?
b. ¿Cómo elegir las variables lingüísticas adecuadas?
c. ¿Cómo encontrar la estructura del modelo difuso? (la estructura de la base de reglas).

a. Conocimiento experto y estrategias basadas en datos.

b. Cuando algún aspecto de un modelo difuso se optimiza o se aprende a partir de los datos, se utiliza comúnmente el término *modelo neuro-difuso*.

c. Jyh-Shing R. Jang (1993) propuso uno de los modelos neuro-difusos pioneros, el modelo ANFIS (*Adaptive Network-based Fuzzy Inference System*).

ANFIS contempla un procedimiento de aprendizaje híbrido:

ANFIS contempla un procedimiento de aprendizaje híbrido:

a. Mínimos cuadrados ordinarios (OLS) para estimar los parámetros del consecuente.

ANFIS contempla un procedimiento de aprendizaje híbrido:

a. Mínimos cuadrados ordinarios (OLS) para estimar los parámetros del consecuente.
b. Aprendizaje basado en descenso de gradiente para determinar los parámetros del antecedente.

ANFIS contempla un procedimiento de aprendizaje híbrido:

a. Mínimos cuadrados ordinarios (OLS) para estimar los parámetros del consecuente.
b. Aprendizaje basado en descenso de gradiente para determinar los parámetros del antecedente.
c. Soluciones alternativas:

   Optimización no lineal sin gradiente, como los Algoritmos Genéticos.

   Clustering difuso (o no) en el espacio producto de las entradas y salidas.

Descenso de gradiente

Estrategia de aprendizaje para estimar los parámetros del modelo o refinar una estimación obtenida por otros métodos (e.g., clustering).

Descenso de gradiente

Estrategia de aprendizaje para estimar los parámetros del modelo o refinar una estimación obtenida por otros métodos (e.g., clustering).

Decisiones de diseño: especificar una forma para las MFs del antecedente (Gaussiana), operador t-norma (producto).

Descenso de gradiente

Estrategia de aprendizaje para estimar los parámetros del modelo o refinar una estimación obtenida por otros métodos (e.g., clustering).

Decisiones de diseño: especificar una forma para las MFs del antecedente (Gaussiana), operador t-norma (producto).

Conjunto de datos de entrenamiento:

$$T = \{(\mathbf{x}_k, y_k) | \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^d, y_k \in \mathbb{R}, k = 1, \ldots, N\}$$

donde $\mathbf{x}_k = x_{k1}, \ldots, x_{kj}, \ldots, x_{kd}$.

$A_j^{(i)}$ está data por:

$$\mu_j^{(i)}(x_j) = \exp\left(-\frac{(x_j - \nu_j^{(i)})^2}{(\sigma_j^{(i)})^2}\right)$$

donde $\nu_j^{(i)}$ y $\sigma_j^{(i)}$ son parámetros de ubicación y escala, respectivamente.

$A_j^{(i)}$ está data por:

$$\mu_j^{(i)}(x_j) = \text{exp}\left(-\frac{(x_j - \nu_j^{(i)})^2}{(\sigma_j^{(i)})^2}\right)$$

donde $\nu_j^{(i)}$ y $\sigma_j^{(i)}$ son parámetros de ubicación y escala, respectivamente.

Se busca minimizar la función de error cuadrático:

$$E = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(y_k - \hat{y}_k)^2 = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}E_k$$

$\hat{y}_k$ es la salida del modelo.

$$E = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(y_k - \hat{y}_k)^2 = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}E_k$$

$\widehat{y}_k$ es la salida del modelo.

$$E = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(y_k - \hat{y}_k)^2 = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}E_k$$

$\hat{y}_k$ es la salida del modelo.

Para el parámetro de ubicación en la iteración ℓ:

$$\nu_j^{(i)}(\ell) = \nu_j^{(i)}(\ell - 1) + \Delta\nu_j^{(i)}$$

donde

$$\Delta\nu_j^{(i)} = -\eta\frac{\partial E}{\partial \nu_j^{(i)}} = -\eta\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}\frac{\partial E_k}{\partial \nu_j^{(i)}}$$

η es un parámetro conocido como tasa de aprendizaje.

El gradiente $\frac{\partial E}{\partial \nu_j^{(i)}}$ es:

$$\frac{\partial E}{\partial \nu_j^{(i)}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(y_k - \hat{y}_k)\left(-\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \nu_j^{(i)}}\right)$$

El gradiente $\frac{\partial E}{\partial \nu_j^{(i)}}$ es:

$$\frac{\partial E}{\partial \nu_j^{(i)}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} (y_k - \hat{y}_k) \left(-\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \nu_j^{(i)}} \right)$$

$\hat{y}_k = \sum_{i=1}^{n} \bar{w}_{ik} f_{ik}$ es la salida del modelo para la entrada $\mathbf{x}_k$.

El gradiente $\frac{\partial E}{\partial \nu_j^{(i)}}$ es:

$$\frac{\partial E}{\partial \nu_j^{(i)}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} (y_k - \hat{y}_k) \left(- \frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \nu_j^{(i)}} \right)$$

$\hat{y}_k = \sum_{i=1}^{n} \bar{w}_{ik} f_{ik}$ es la salida del modelo para la entrada $\mathbf{x}_k$.

$\bar{w}_{ik}$ es el nivel de activación normalizado de la regla i.

El gradiente $\frac{\partial E}{\partial \nu_j^{(i)}}$ es:

$$\frac{\partial E}{\partial \nu_j^{(i)}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} (y_k - \hat{y}_k) \left(-\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \nu_j^{(i)}} \right)$$

$\hat{y}_k = \sum_{i=1}^{n} \bar{w}_{ik} f_{ik}$ es la salida del modelo para la entrada $\mathbf{x}_k$.

$\bar{w}_{ik}$ es el nivel de activación normalizado de la regla i.

f_{ik} es la salida de la salida de la regla i.

Los parámetros de las premisas, $\nu_j^{(i)}$ y $\sigma_j^{(i)}$, se estiman de manera iterativa utilizando las siguientes reglas de actualización:

$$\nu_j^{(i)}(l) = \nu_j^{(i)}(l-1) + \sum_{k=1}^{N} 4\eta \frac{1}{(\sigma_j^{(i)}(l-1))^2}(x_{kj} - \nu_j^{(i)}(l-1))\bar{w}_{ik}(f_{ik} - \hat{y}_k)(y_k - \hat{y}_k)$$

$$\sigma_j^{(i)}(l) = \sigma_j^{(i)}(l-1) + \sum_{k=1}^{N} 4\eta \frac{1}{(\sigma_j^{(i)}(l-1))^3}(x_{kj} - \nu_j^{(i)}(l-1))^2\bar{w}_{ik}(f_{ik} - \hat{y}_k)(y_k - \hat{y}_k)$$

Estimación de parámetros del consecuente

Se puede plantear este problema usando mínimos cuadrados.

Estimación de parámetros del consecuente

Se puede plantear este problema usando mínimos cuadrados.

Se estiman por separado para cada regla:

$$\min_{\Theta_i} \frac{1}{N}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_e\Theta^{(i)})^t \Phi_i (\mathbf{y} - \mathbf{x}_e\Theta^{(i)})$$

$\mathbf{x}_e = [\mathbf{x}; \mathbf{1}]$ es la matriz de regresores extendida.

Estimación de parámetros del consecuente

Se puede plantear este problema usando mínimos cuadrados.

Se estiman por separado para cada regla:

$$\min_{\Theta_i} \frac{1}{N}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_e\Theta^{(i)})^t \Phi_i (\mathbf{y} - \mathbf{x}_e\Theta^{(i)})$$

$\mathbf{x}_e = [\mathbf{x}; \mathbf{1}]$ es la matriz de regresores extendida.

Φ_i es una matriz de la forma:

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} \bar{w}_{1i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{w}_{2i} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{w}_{Ni} \end{bmatrix}$$

$$\Theta^{(i)} = (\mathbf{x}_e^t \Phi_i \mathbf{x}_e)^{-1} \mathbf{x}_e^t \Phi_i \mathbf{y}, \qquad \text{para } i = 1, \dots, n.$$